

Peterson da Costa Silva

Uma introdução à teoria espectral de grafos por meio da matriz de adjacência

Alegre - ES

Fevereiro de 2026

Peterson da Costa Silva

Uma introdução à teoria espectral de grafos por meio da matriz de adjacência

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Orientador: Victor do Nascimento Martins

Alegre - ES

Fevereiro de 2026

Peterson da Costa Silva

Uma introdução à teoria espectral de grafos por meio da matriz de adjacência

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Trabalho aprovado. Alegre - ES, 26 de fevereiro de 2026.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Victor do Nascimento Martins
(DMPA/CCENS - UFES)

Prof. Dr. Eleonesio Strey
(DMPA/CCENS - UFES)

Prof. Me. Bernardo Ignatowski Barcelos
(DMPA/CCENS - UFES)

Orientador:

Prof. Dr. Victor do Nascimento Martins
(DMPA/CCENS - UFES)

Alegre - ES
Fevereiro de 2026

Esse trabalho dedico à minha família

Agradecimentos

Agradeço à família e amigos pelo apoio nessa caminhada. Agradeço a Deus que, mesmo diante de tudo, sempre esteve presente no barco. Agradeço também ao meu orientador pelo suporte acadêmico ao longo da graduação.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo introdutório sobre a teoria espectral de grafos, com ênfase na matriz de adjacência e em seus autovalores. Inicialmente, são discutidos conceitos básicos da teoria dos grafos, necessários para a compreensão das estruturas analisadas. Em seguida, introduz-se a matriz de adjacência, destacando suas propriedades e sua relação com características estruturais dos grafos. A partir do polinômio característico, define-se o espectro de um grafo e são analisados exemplos de grafos simples, como caminhos, ciclos e grafos completos, evidenciando como informações espectrais podem auxiliar na compreensão dessas estruturas. O trabalho tem caráter expositivo e visa evidenciar a conexão entre a álgebra linear e a teoria dos grafos, contribuindo para a formação matemática em nível de graduação.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Teoria dos Grafos. Matriz de Adjacência. Teoria Espectral.

Sumário

	Introdução	7
1	FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS GRAFOS	9
2	MATRIZ DE ADJACÊNCIA	17
3	TEORIA ESPECTRAL DE GRAFOS	25
4	EXEMPLOS E APLICAÇÕES	32
	Considerações finais	37
	REFERÊNCIAS	39

Introdução

A teoria dos grafos constitui uma área fundamental da matemática discreta dedicada ao estudo de estruturas formadas por conjuntos de vértices e arestas, sendo amplamente utilizada na modelagem e análise de sistemas complexos. Suas aplicações abrangem diversas áreas do conhecimento, como ciência da computação, física, química, engenharia, biologia e ciências sociais, nas quais problemas de conectividade, organização e interação entre elementos podem ser representados de forma eficiente por meio de grafos. Nesse contexto, a teoria dos grafos se destaca tanto por seu valor teórico quanto por sua relevância prática.

Associada a essa área, a teoria espectral de grafos estabelece uma conexão direta com a álgebra linear, ao investigar propriedades dos grafos a partir dos autovalores e autovetores de matrizes a eles associadas. Entre essas matrizes, a matriz de adjacência ocupa papel central, pois codifica de maneira algébrica as relações de adjacência entre os vértices de um grafo. O estudo do espectro da matriz de adjacência possibilita extrair informações relevantes sobre a estrutura do grafo, como regularidade, conectividade e padrões de simetria, evidenciando a profundidade da relação entre estruturas combinatórias e ferramentas algébricas.

No âmbito da formação matemática em nível de graduação, especialmente nos cursos de Licenciatura em Matemática, o estudo da teoria espectral de grafos apresenta-se como uma oportunidade de integração entre conteúdos de álgebra linear e matemática discreta. Essa articulação contribui para uma compreensão mais ampla dos conceitos estudados ao longo do curso, além de favorecer uma visão unificada da matemática, na qual diferentes áreas dialogam entre si.

Diante desse cenário, o objetivo geral deste trabalho é analisar como a matriz de adjacência e seus autovalores podem ser utilizados para descrever propriedades básicas de grafos simples, por meio de exemplos da teoria espectral de grafos. Trata-se de um estudo de caráter introdutório e expositivo, cujo foco está na compreensão conceitual e na aplicação dos principais resultados da teoria espectral em situações concretas e acessíveis ao nível de graduação.

Como objetivos específicos, o trabalho busca:

- apresentar os conceitos fundamentais da teoria dos grafos necessários para o desenvolvimento do estudo;
- definir a matriz de adjacência de um grafo e discutir suas principais propriedades;
- introduzir o conceito de espectro de um grafo a partir dos autovalores da matriz de adjacência;

- aplicar os conceitos apresentados à análise de grafos simples, como caminhos, ciclos e grafos completos, por meio de exemplos ilustrativos.

Este trabalho não tem como propósito esgotar o tema nem apresentar resultados inéditos, mas sim evidenciar a utilidade da álgebra linear no estudo de grafos, oferecendo uma introdução organizada à teoria espectral de grafos e destacando seu potencial como ferramenta de análise estrutural.

O texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, são apresentados os conceitos básicos da teoria dos grafos, incluindo definições, tipos de grafos e propriedades fundamentais. O Capítulo 2 dedica-se ao estudo da matriz de adjacência, abordando sua definição, propriedades e exemplos que ilustram sua construção e interpretação. No Capítulo 3, introduz-se a teoria espectral de grafos, com foco no polinômio característico, nos autovalores da matriz de adjacência e no conceito de espectro de um grafo. Por fim, no Capítulo 4, são analisados exemplos de grafos simples, com o objetivo de aplicar os conceitos estudados e evidenciar a relação entre o espectro e a estrutura dos grafos. O trabalho encerra-se com as Considerações finais, nas quais são discutidos os principais resultados obtidos, as limitações do estudo e possíveis direções para investigações futuras.

1 Fundamentos da Teoria dos Grafos

A teoria dos grafos fornece a base conceitual necessária para o estudo de diversas estruturas discretas que surgem tanto em contextos puramente matemáticos quanto em aplicações em outras áreas do conhecimento. Por meio da representação de sistemas em termos de vértices e arestas, essa teoria permite modelar relações de adjacência, conectividade e interação entre elementos de forma clara e rigorosa. Assim, o domínio de seus conceitos fundamentais é indispensável para a compreensão de abordagens mais avançadas, como aquelas desenvolvidas na teoria espectral de grafos.

Neste capítulo, são apresentados os principais conceitos e definições da teoria dos grafos que serão utilizados ao longo do trabalho, com o objetivo de estabelecer uma base sólida para os capítulos subsequentes. A ênfase recai sobre grafos simples, uma vez que estes constituem o principal objeto de estudo quando se trabalha com a matriz de adjacência e com a análise espectral. Os conceitos aqui discutidos, como ordem e tamanho de um grafo, tipos de grafos, grau de vértices, subgrafos, caminhos, ciclos e isomorfismos, serão recorrentes nas análises desenvolvidas posteriormente.

Para a exposição dos conteúdos, toma-se como principal referência ([ABREU et al., 2007](#)), que apresenta uma abordagem acessível e rigorosa da teoria dos grafos e de suas conexões com a álgebra linear. A escolha dessa referência justifica-se por sua adequação ao nível de graduação e por fornecer o suporte teórico necessário para o desenvolvimento do estudo da matriz de adjacência e da teoria espectral de grafos, temas que serão aprofundados nos capítulos seguintes.

Definição 1.1. Um **grafo** $G = (V, E)$ é uma estrutura definida pelo par de conjuntos V e E tal que V é um conjunto finito e não vazio, cujos elementos são denominados vértices e E é um conjunto de pares de V denominados arestas. Normalmente, o conjunto dos vértices e arestas são denotadas por $V = V(G)$ e $E = E(G)$.

Se $v_1, v_2 \in V$ e $e = \{v_1, v_2\} \in E$, dizemos que a aresta e **incide** em v_1 e v_2 . Indicamos por $|V|$ e $|E|$, respectivamente, a **ordem** e o **tamanho** de um grafo G , onde a ordem representa o número de vértices e o tamanho o número de arestas do grafo. Quando G possuir um único vértice e $E = \emptyset$ dizemos que G é um **grafo trivial**.

Na Figura 1 abaixo temos um exemplo da representação de um grafo G , onde os vértices são representados por $V = \{Alegre, Café, Guaçuí, Rive\}$ e as arestas representadas por $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

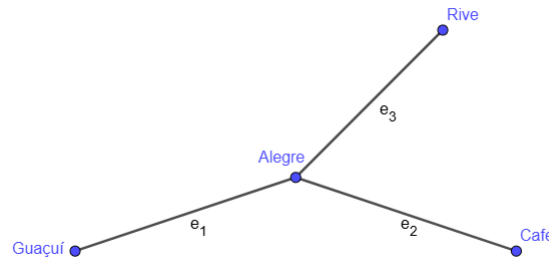


Figura 1 – Grafo G . **Fonte:** Do próprio autor

Perceba que:

- $|V| = 4$;
- $|E| = 3$;
- As arestas são $e_1 = \{Alegre, Guaçuí\}$, $e_2 = \{Alegre, Café\}$ e $e_3 = \{Alegre, Rive\}$.

Caso um grafo possua múltiplas arestas que incidem sobre um par de vértices, esse grafo recebe o nome de **multigrafo**. Grafos que possuem arestas que incidem no próprio vértice (em outras palavras "**Laços ou Auto-Loop**"), são chamados de **pseudografo**.

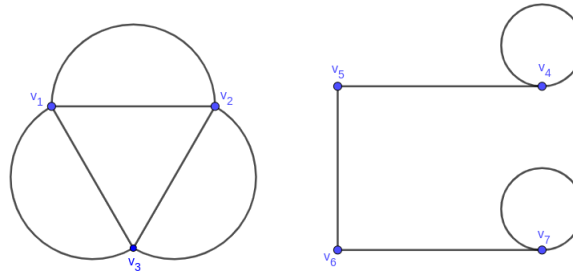


Figura 2 – Multigrafo e Pseudografo. **Fonte:** Do próprio autor

Grafos que não apresentam múltiplas arestas sobre um par de vértices e nem laços sobre um mesmo vértice são denominados **grafos simples**. A Figura 1 é um exemplo de grafos simples.

Definição 1.2. Vértices ligados por uma mesma aresta são ditos **vértices adjacentes**. De forma análoga, arestas que possuem vértice em comum são ditas **arestas adjacentes**.

Da Figura 1, temos que:

- Os vértices *Alegre* e *Guaçuí* são adjacentes em e_1 ;
- Os vértices *Guaçuí* e *Rive* não são adjacentes, já que não há aresta ligando *Guaçuí* a *Rive*;

- As arestas e_1 e e_2 são adjacentes, pois apresentam o vértice *Alegre* em comum.

Definição 1.3. O **grau de um vértice** v , normalmente denotado por $d(v)$, é definido pelo número de arestas que incidem em v . Caso o vértice possua um laço, o laço deve ser contado duas vezes. O **grau mínimo** de um grafo G , denotado por δ é o menor grau dentre os vértices de G , isto é, $\delta = \min \{d(v) : v \in V\}$, e o **grau máximo**, denotado por Δ é o maior grau dentre os vértices de G , isto é, $\Delta = \max \{d(v) : v \in V\}$.

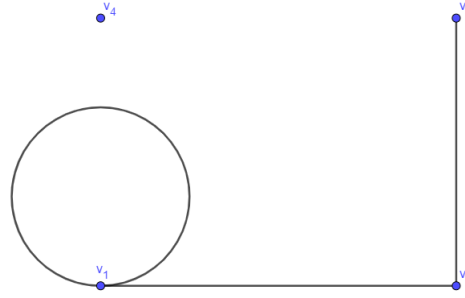


Figura 3 – Grafo G com laço em v_1 . **Fonte:** Do próprio autor

Neste pseudografo apresentado na Figura 3 acima, temos: $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 1$, percebe-se que no v_4 não possui nenhuma aresta que incide sobre ele, então $d(v_4) = 0$ e neste caso é chamado de **vértice isolado**. Quando olhamos para v_1 , temos que há uma aresta conectando a v_2 e um laço sobre ele mesmo. No caso do laço, é intuitivo que se trata de uma aresta onde $e = \{v_1, v_1\}$, onde possamos contar que a aresta incide tanto da direita para esquerda, ou vice-versa, conectando no mesmo vértice, logo $d(v_1) = 3$. O grau mínimo deste pseudografo é $\delta = d(v_4) = 0$ e o grau máximo é $\Delta = d(v_1) = 3$.

Definição 1.4. Sejam os grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$. Dizemos que G' é **subgrafo** de G sempre que $G' \subset G$, isto é, satisfizer $V'(G') \subseteq V(G)$ e $E'(G') \subseteq E(G)$.

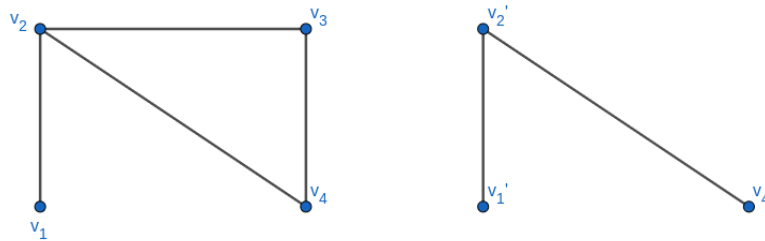


Figura 4 – Grafo G e seu subgrafo G' . **Fonte:** Do próprio autor

Na Figura 5, usaremos o mesmo grafo G da Figura 4, porém com outro grafo que não representa um subgrafo de G .

Perceba que, na Figura 4, o subgrafo G' respeita as propriedades do grafo G já que $V'(G') \subset V(G)$ e $E'(G') \subset E(G)$. No caso da Figura 5, é perceptível que $V(H) = V(G)$,

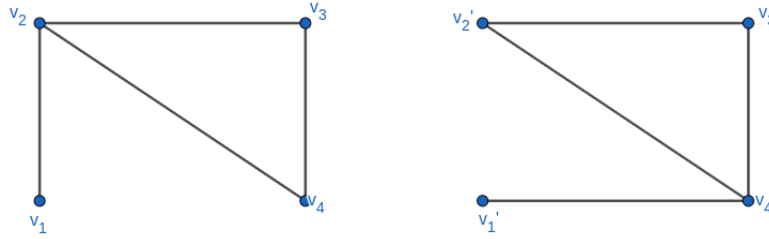


Figura 5 – Grafo G e outro grafo H qualquer. **Fonte:** Do próprio autor

no entanto, $E(H) \neq E(G)$, pois no Grafo G não há aresta que incide sobre v_1 e v_4 , respectivamente, sendo assim, modificando a estrutura do grafo G . Logo, $H \not\subset G$ e não pode ser considerado subgrafo de G .

Definição 1.5. Dado um grafo $G = (V, E)$, uma sequência finita de n vértices é considerado um **passeio** de v_1 a v_n se $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ sempre que $1 \leq i \leq n - 1$. Uma **cadeia** é um tipo de passeio onde nenhuma aresta é repetida, mas podendo repetir vértices. Um passeio onde nenhum vértice e nenhuma aresta é repetida é chamado de **caminho** e é denotado por P_n se n for o número de vértices que o compõe. O **tamanho** (ou **comprimento**) de um caminho é o número de arestas que compõem o caminho. Um **ciclo** em um grafo G é um caminho, onde se permite a repetição de um único vértice, o inicial, que neste caso, coincide com o vértice final. Um ciclo com n vértices será denotado por C_n .

Abaixo apresentaremos alguns tipos de grafos simples que possam advir no decorrer deste trabalho.

- **Grafo conexo:** É um grafo no qual possa se estabelecer um passeio ligando cada par de vértices dados. Caso contrário, o grafo é dito **desconexo**. Observe as figuras 6 e 7 apresentadas a seguir:

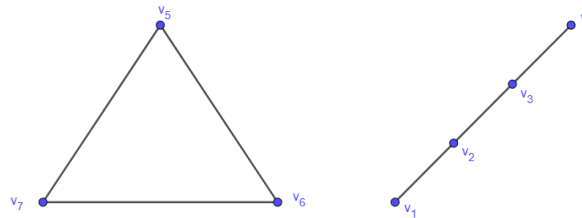


Figura 6 – Grafos conexos C_3 e P_4 . **Fonte:** Do próprio autor

Observação 1.1. No caso do grafo C_3 , ele é conhecido como **triângulo**.

- **Grafo direcionado:** É um grafo onde suas arestas possuem uma direção entre um par de vértices, onde o primeiro vértice é o ponto de partida e o segundo é o ponto

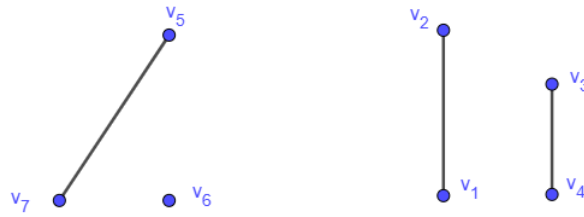


Figura 7 – Grafos G e H desconexos. **Fonte:** Do próprio autor

de chegada da aresta. Com isso, $e = \{v_1, v_2\} \neq \{v_2, v_1\}$. A figura 8 abaixo é um exemplo de um grafo direcionado.

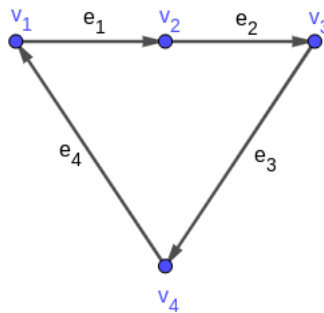


Figura 8 – Grafo direcionado. **Fonte:** Do próprio autor.

- **Grafo rotulado:** É um grafo onde podemos dar rótulos aos vértices e/ou as aretas. A figura 9 é um exemplo de um grafo rotulado onde seus vértices são rotulados pelos nomes de algumas cidades do Espírito Santo.

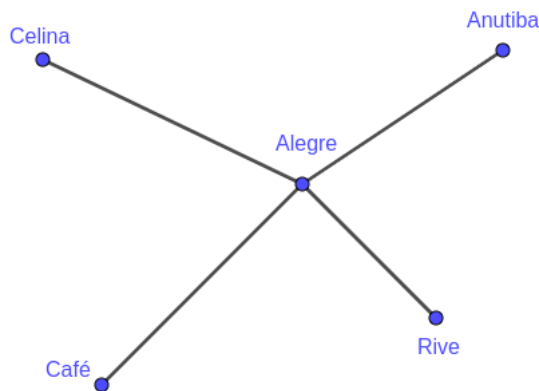


Figura 9 – Grafo Rotulado. **Fonte:** Do próprio autor

- **Grafo regular de grau k ou k -regular:** É um grafo onde todos os vértices possuem o mesmo grau k . A Figura 10 a seguir representa um grafo 2-regular. De fato, Note que $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 2$.

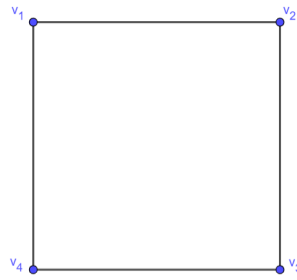


Figura 10 – Grafo 2-regular. **Fonte:** Do próprio autor

- **Grafo completo:** É um grafo onde todos os vértices distintos são adjacentes. Este grafo é denotado de acordo com o seu número de vértices, se o grafo possui n vértices, então ele é K_n . Na Figura 11 abaixo, podemos ver que se trata de um grafo K_4 .

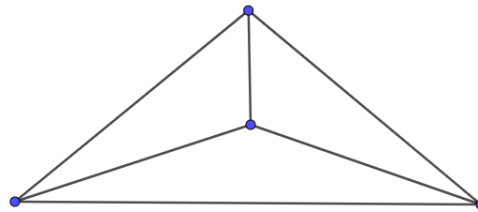


Figura 11 – Grafo K_4 . **Fonte:** Do próprio autor

Como no grafo completo todos os vértices distintos são adjacentes, temos que todos os vértices possuem o mesmo grau $d(v) = n - 1$, ou seja, se o grafo possui n vértices então ele é $(n - 1)$ -regular.

- **Grafo k-partido:** Um grafo $G = (V, E)$ é considerado **k-partido** quando existe uma partição no conjunto de vértices V em k subconjuntos, isto é, $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, com $V_i \cap V_j = \emptyset$, sempre que $i \neq j$ com $1 \leq i, j \leq k$ e arestas conectam apenas vértices de conjuntos diferentes, nunca dentro do mesmo conjunto.

Quando $k = 2$ o grafo é chamado de **grafo bipartido**. A Figura 12 abaixo é um exemplo de grafo bipartido, com $V_1 = \{v_1, v_2\}$ e $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$. Trabalharemos apenas até o $k = 2$.

Sempre que cada vértice do conjunto V_1 for adjacente a todo vértice do conjunto V_2 , $G = (V_1 \cup V_2, E)$ o grafo é chamado de **grafo bipartido completo**. Normalmente é representado por $K_{p,q}$, onde $|V_1| = p$ e $|V_2| = q$.

Note que, nos exemplos das figuras 12 e 13:

- $V_1 = \{v_1, v_2\}$ e $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

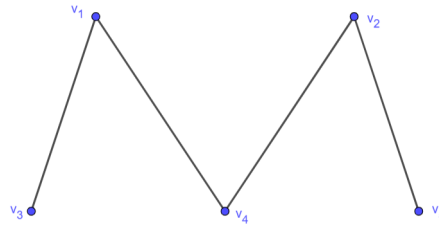


Figura 12 – Grafo G bipartido. **Fonte:** Do próprio autor

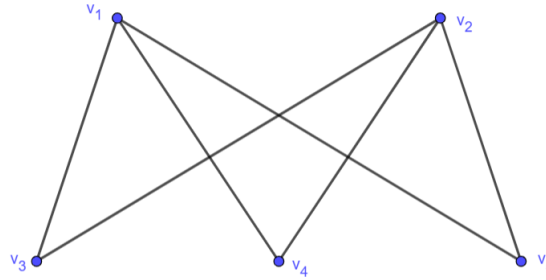


Figura 13 – Grafo G bipartido completo. **Fonte:** Do próprio autor

- **Grafo complementar:** Um grafo $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ é dito complementar de $G = (V, E)$ quando $\bar{V} = V$ e qualquer $\{v_i, v_j\} \in \bar{E}$ quando $\{v_i, v_j\} \notin E$. A Figura 14, mostra um exemplo de um grafo G e seu complementar $\bar{G}$.

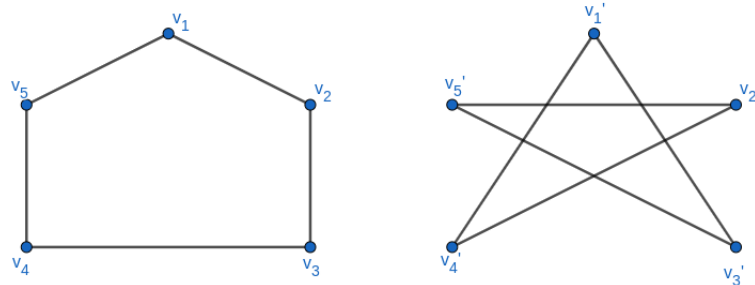


Figura 14 – Grafo G e seu grafo complementar $\bar{G}$. **Fonte:** Do próprio autor

Em outras palavras, um grafo complementar $\bar{G}$ é um grafo que revela as adjacências entre dois vértices não adjacentes de G .

Além de apresentarmos tipos de grafos nos exemplos anteriores, é importante trazer uma noção algébrica comum para o contexto dos grafos que estabelece uma relação de um grafo com outro, mesmo que eles sejam diferentes visualmente. Quando grafos seguem propriedades “semelhantes” entre vértices e arestas, então eles possuem uma relação que chamaremos de isomorfismo.

Definição 1.6. Dois grafos F e G são considerados **isomorfos** quando é possível estabelecer uma aplicação f bijetora de $V(G)$ em $V(F)$ de tal forma que:

$$v_1 \text{ e } v_2 \text{ são adjacentes em } G \iff f(v_1) \text{ e } f(v_2) \text{ são adjacentes em } F$$

Tal aplicação é dita um **isomorfismo** entre os grafos.

Exemplo 1. Segue abaixo um exemplo da figura 15 de dois grafos isomorfos:

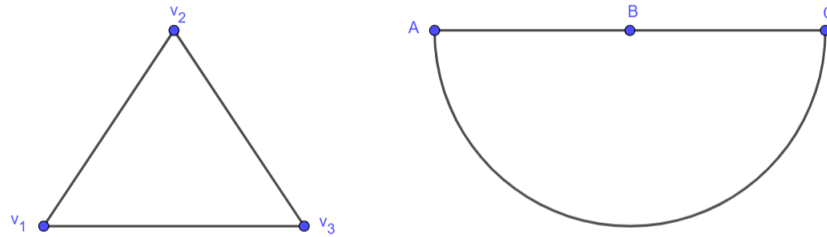


Figura 15 – Grafos F e G isomorfos. **Fonte:** Do próprio autor

Note que:

- Ambos os grafos possuem 3 vértices e 3 arestas.
- É possível estabelecer uma relação de vértices de modo que: $f(v_1) = A$, $f(v_2) = B$, e $f(v_3) = C$.
- Os vértices relacionados possuem o mesmo grau.

Perceba que, mesmo eles sendo geometricamente diferentes, essa relação de isomorfismo os tornam bem “parecidos”, matematicamente falando. Essa definição é essencial para trabalharmos de maneira mais abrangente nos próximos capítulos.

2 Matriz de adjacência

A representação matricial de grafos constitui uma das principais formas de estabelecer a ligação entre a teoria dos grafos e a álgebra linear. Entre as diferentes matrizes associadas a um grafo, a matriz de adjacência destaca-se por sua simplicidade conceitual e pela quantidade de informações estruturais que pode fornecer. Por meio dessa matriz, as relações de adjacência entre os vértices de um grafo passam a ser descritas de maneira algébrica, possibilitando o uso de ferramentas da álgebra linear na análise dessas estruturas.

Neste capítulo, a matriz de adjacência é introduzida como o principal objeto de estudo, sendo apresentada sua definição formal e discutidas algumas de suas propriedades fundamentais. A partir dessa abordagem, torna-se possível compreender como características do grafo, como o grau dos vértices, a conectividade e a decomposição em componentes, podem ser identificadas diretamente a partir da análise da matriz associada. Além disso, são explorados exemplos simples que ilustram a construção da matriz de adjacência e a interpretação de suas entradas.

A exposição apresentada neste capítulo baseia-se principalmente em ([ABREU et al., 2007](#)), que fornece uma introdução consistente à teoria espectral de grafos, bem como em ([RODRIGUES; ALMEIDA, 2019](#)), que discute propriedades da matriz de adjacência em grafos simples. Essas referências oferecem o suporte teórico necessário para o desenvolvimento das ideias aqui apresentadas e fundamentam a transição para o estudo do espectro dos grafos, que será abordado no capítulo seguinte.

Dessa forma, o presente capítulo desempenha um papel central na estrutura do trabalho, servindo como elo entre os conceitos básicos da teoria dos grafos, apresentados no capítulo anterior, e a teoria espectral de grafos, desenvolvida posteriormente. A compreensão da matriz de adjacência e de suas propriedades é essencial para o entendimento dos autovalores e do espectro de um grafo, temas que constituem o foco das análises subsequentes.

Definição 2.1. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices. A sua **matriz de adjacência**, denotado por $A(G)$, é uma matriz quadrada de ordem n onde as entradas são definidas por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Para facilitar a compreensão, abaixo temos um exemplo:

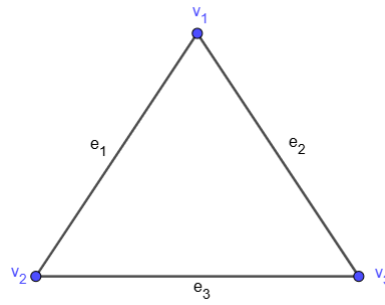


Figura 16 – Grafo G com 3 vértices. **Fonte:** Do próprio autor

No caso do exemplo do grafo G acima, sua matriz de adjacência é representada da seguinte forma:

$$A(G) = \begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Propriedade 2.1. A matriz de adjacência $A(G)$ é uma **matriz simétrica**, isto é, $A(G) = (A(G))^t$, em outras palavras, $a_{ij} = a_{ji}$, para quaisquer i, j .

Essa propriedade é válida pois, além de estarmos trabalhando com grafos simples, não estamos considerando o “sentido” da aresta entre um par de vértices. Portanto, sempre que a aresta $\{v_i, v_j\} \in E$ automaticamente $a_{ij} = a_{ji}$, tornando $A(G)$ uma matriz simétrica.

Observação 2.1. Vale ressaltar que essa propriedade se aplica a todos os grafos simples apresentados no capítulo anterior, exceto para grafos direcionados.

Para que a Observação 2.1 fique mais clara, considere o exemplo abaixo:

Exemplo 2. Considere o grafo G direcionado a seguir

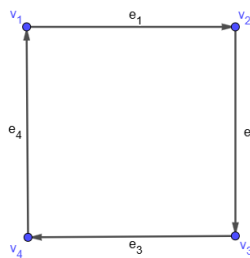


Figura 17 – Grafo G direcionado com 4 vértices. **Fonte:** Do próprio autor

Sua $A(G)$ é dada por

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Note que, essa matriz está de acordo com a definição da própria matriz de adjacência. No entanto, ela não é simétrica, já que $a_{ij} \neq a_{ji}$.

Exemplo 3. Neste exemplo encontraremos uma possível representação de um grafo a partir da sua matriz de adjacência.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Com $A(G)$ já definida, podemos extrair algumas informações, perceba que:

- O grafo G possui $|V| = 4$, já que a matriz é quadrada de ordem 4.
- De acordo com as entradas a_{12} e a_{21} da matriz, temos que v_1 e v_2 são adjacentes.
- E das entradas a_{34} e a_{43} da matriz, temos que v_3 e v_4 são adjacentes.
- Note que não há nenhuma relação de adjacência entre v_1 com v_3 nem v_1 e v_4 . De forma análoga para v_2 .

Como há apenas 2 caminhos possíveis para se fazer $\{v_1, v_2\}$ e $\{v_3, v_4\}$ em G . Temos que G é um grafo desconexo e pode ser representado como:

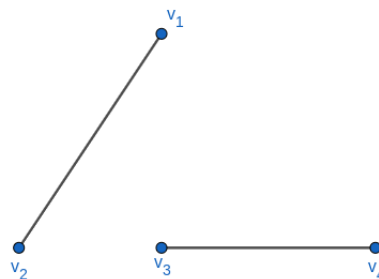


Figura 18 – Encontrando uma possível representação do grafo G desconexo através de $A(G)$. **Fonte:** Do próprio autor

Propriedade 2.2. A soma das entradas de cada linha de $A(G)$ é igual ao grau do respectivo vértice.

Essa propriedade resulta da própria definição da matriz de adjacência. Como cada linha i apresenta o número de incidências do vértice v_i com cada vértice v_j da coluna j , então a soma de cada entrada da linha i é representada como $\sum_{j=1}^n a_{ij} = d(v_i)$.

Relembramos do estudo de matrizes que o **traço** de uma matriz quadrada A , denotado por $tr(A)$, é a soma de todas as entradas pertencentes a diagonal principal. Ou seja, $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Como estamos trabalhando com grafo simples, onde não há laços, então para qualquer matriz de adjacência $A(G)$ teremos $tr(A(G)) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$.

Propriedade 2.3. *O traço da matriz de $A(G)^2$ resulta no dobro do número de arestas de G . Logo, $tr(A(G)^2) = 2|E|$.*

Exemplo 4. Considere a seguinte matriz de adjacência $A(G)$ abaixo, onde $a_{ij} = 1$ se $i \neq j$:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \times a_{21} & 0 \\ 0 & a_{21} \times a_{12} \end{bmatrix}$$

Observe que, as entradas da matriz $A(G)^2$, pelos seus índices, representam:

- $a_{12} \times a_{21}$ indica: $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$
- $a_{21} \times a_{12}$ indica: $v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$

Ou seja, as entradas representam caminhos fechados de tamanho 2, indo e voltando para o mesmo vértice. Logo, cada aresta é contada duas vezes.

Propriedade 2.4. *O traço da matriz $A(G)^3$ nos indica a quantidade de triângulos que temos no grafo G pois, $tr(A(G)^3) = 6t$, onde t é quantidade de triângulos do grafo.*

Propriedade 2.5. *Considere um grafo G com n vértices e sua matriz de adjacência $A(G)$, a entrada (i, j) de $A(G)^l$ indica o número de caminhos distintos de tamanho l de v_i a v_j .*

Demonstração. Usaremos indução em l .

Note que, para $l = 1$, $A(G)^1 = A(G)$ e a entrada (i, j) de $A(G)$ indica exatamente se os vértices v_i e v_j são adjacentes, ou seja se existe caminho de tamanho 1 entre eles.

Para $l = 2$, temos $A(G)^2 = A(G) \cdot A(G)$ e daí as entradas c_{ij} serão da forma

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}, \quad \text{com } 1 \leq i, j \leq n$$

Observe que tal entrada resulta na quantidade de caminhos de tamanho 2 ligando v_i e v_j , já que: a_{ik} indica possível caminho do vértice v_i ao v_k e a_{kj} indica caminho do vértice v_k ao v_j . Assim, cada produto $a_{ik} \cdot a_{kj}$ será 0 se não existir caminho de tamanho 2 ou 1 se existir. A soma desses produtos será a quantidade exata de caminhos de tamanho 2 entre os vértices.

Agora, suponhamos que para $l = L$, a entrada b_{ij} de $A(G)^L$ corresponde ao número de caminhos de tamanho L entre v_i a v_j .

Tome $C = A(G)^{L+1} = A(G)^L \cdot A(G)$, temos que a entrada c_{ij} de C é dada por:

$$c_{ij} = b_{i1} \cdot a_{1j} + b_{i2} \cdot a_{2j} + \cdots + b_{in-1} \cdot a_{n-1j} + b_{in} \cdot a_{nj}$$

Por hipótese, sabemos que b_{i1} indica caminhos de tamanho L de v_i a v_1 , agora a_{1j} nos indica se há ou não caminho entre v_1 a v_j . Se sim, então $b_{i1} \cdot a_{1j}$ indica um caminho de tamanho $L + 1$ entre v_i a v_j passando pelo vértice v_1 . Analogamente, temos que $b_{in} \cdot a_{nj}$ indica se existe um caminho de tamanho $L + 1$ entre v_i a v_j passando pelo vértice v_n . Segue que c_{ij} indica o número de caminhos de tamanho $L + 1$ entre v_i e v_j .

Portanto, por indução, $A(G)^l$ indica o número de caminhos distintos de tamanho l entre v_i e v_j . $\square$

Definição 2.2. Seja $A(G)$ uma matriz quadrada de ordem n . Uma **submatriz principal** de ordem k de $A(G)$ é a submatriz obtida ao selecionar um subconjunto $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ com $|I| = k$ e considerar as linhas e colunas de $A(G)$ indexadas por I .

Vamos denotar por A'_k a submatriz principal de $A(G)$ onde consideramos o subconjunto de índices $I = \{1, 2, \dots, k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Se usarmos a matriz de adjacência dada no Exemplo 3, temos:

- A submatriz principal A'_1 é a submatriz que corresponde a matriz de linha 1 e coluna 1, ou seja,

$$A'_1 = [0] \tag{2.3}$$

- A submatriz principal A'_2 é a submatriz abaixo

$$A'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

- A submatriz principal A'_4 é a própria $A(G)$.

De certo modo, o conjunto das submatrizes principais são “recortes” da própria $A(G)$, e, a partir de um abuso de notação, podemos admitir a seguinte inclusão de matrizes $A'_1 \subset A'_2 \subset A'_3 \subset \dots \subset A'_m \subset A(G)$.

Observação 2.2. Vale ressaltar que, a matriz $A(G)$ é uma matriz quadrada, então todas as suas submatrizes principais vão seguir a mesma propriedade.

Propriedade 2.6. *Dado um grafo com n vértices, então esse grafo possui até $n!$ matrizes de adjacência diferentes.*

Considere o grafo G abaixo, com seus 4 vértices já definidos:

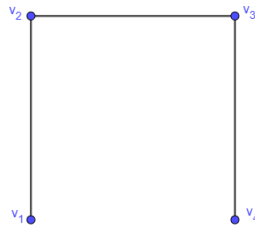


Figura 19 – Grafo G . **Fonte:** Do próprio autor

Daí, sua matriz de adjacência $A(G)$ é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mudando a ordem dos vértices de G , como abaixo, por exemplo:

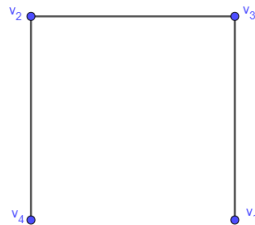


Figura 20 – Nova ordem de vértices do grafo G . **Fonte:** Do próprio autor

Com essa nova ordem, sua nova matriz de adjacência será

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com isso, se expandirmos para um grafo com n vértices, teremos $n!$ possibilidades de ordenações diferentes, e com isso $n!$ matrizes de adjacência diferentes para o mesmo grafo.

Observação 2.3. Note que essa propriedade não é válida para grafos direcionados e grafos completos.

No caso de grafos direcionados, suas arestas possuem direção, logo sabemos que a matriz de adjacência não seria simétrica. Agora, para grafos completos onde todos os vértices distintos são adjacentes, todas as entradas a_{ij} com $i \neq j$ são iguais a 1. Ou seja, se permutarmos as linhas e colunas da matriz de adjacência resultaríamos em matrizes idênticas.

Propriedade 2.7. *Um grafo é exclusivamente definido pela sua matriz de adjacência.*

De fato, com a matriz de $A(G)$ já definida, é possível a construção do grafo tendo em vista o exemplo da propriedade anterior. Observe que, dado os exemplos das figuras 19 e 20, conforme a permutação dos vértices, a reconstrução a partir da nova matriz de adjacência irá resultar em um isomorfismo.

Uma **matriz de permutação** P é uma matriz quadrada binária, onde suas entradas são representadas apenas por zeros e um, sendo que o número 1 aparece uma única vez em cada linha e cada coluna. Quando multiplicamos essa matriz de permutação por outra matriz qualquer X , o resultado dessa multiplicação apresenta a matriz X com linhas e colunas trocadas.

Propriedade 2.8. *Se dois grafos G e H são isomorfos, então existe uma matriz de permutação P , tal que $A(G) = P^{-1}A(H)P$.*

Para analisarmos essa propriedade usaremos de exemplo os grafos B e C isomorfos abaixo:

Estabelecendo a relação entre os vértices, temos:

- Ambos os grafos possuem a mesma quantidade de vértices e arestas.
- $f(v_1) = A$, $f(v_2) = C$, $f(v_3) = D$ e $f(v_4) = B$.

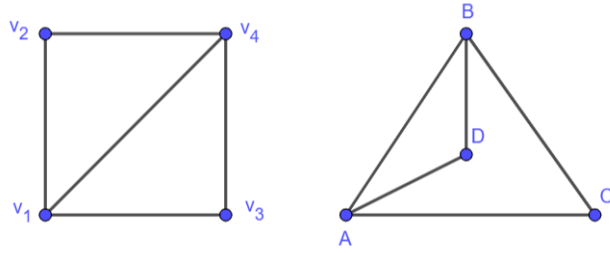


Figura 21 – Grafos G e H isomorfos de ordem 4. **Fonte:** Do próprio autor

- Com a relação já definida acima de $V(G) \rightarrow V(H)$, temos que nossa matriz de permutação P é da seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cada entrada dessa matriz está relacionada com os vértices de G e com os índices i dos vértices de H . No entanto, como P é uma matriz de permutação, pela sua propriedade, temos que : $P^{-1} = P^T$

Daí, $P^{-1}A(H)P =$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A(G) \end{aligned}$$

Propriedades como essas são interessantes para verificar se há relação de isomorfismo entre os grafos com o auxílio de matrizes de permutação, como nesse exemplo simples de matrizes 4×4 . Entretanto, matrizes com ordem maiores é aconselhável usar programas para o rápido desenvolvimento das contas.

3 Teoria Espectral de Grafos

A teoria espectral de grafos surge da aplicação de conceitos da álgebra linear ao estudo de grafos, estabelecendo uma relação entre propriedades estruturais dessas estruturas combinatórias e os autovalores de matrizes a elas associadas. Em particular, a análise espectral baseada na matriz de adjacência permite investigar características dos grafos por meio de ferramentas algébricas clássicas, como polinômios característicos, autovalores e multiplicidades. Essa abordagem evidencia a profundidade da conexão entre a teoria dos grafos e a álgebra linear, tema central deste trabalho.

Neste capítulo, introduz-se o conceito de espectro de um grafo a partir dos autovalores da matriz de adjacência, com o objetivo de compreender como essas informações espectrais podem refletir aspectos da estrutura do grafo. São apresentados o polinômio característico da matriz de adjacência, a definição de autovalores e multiplicidades, bem como a noção de espectro de um grafo. A exposição prioriza exemplos simples, compatíveis com o nível de graduação, de modo a favorecer a compreensão dos conceitos apresentados.

Além das definições formais, o capítulo discute algumas propriedades básicas do espectro de um grafo e suas relações com características estruturais, como o número de vértices, o número de arestas e a presença de subestruturas específicas. Embora a teoria espectral de grafos possua resultados profundos e extensos, o enfoque adotado neste trabalho é introdutório e expositivo, limitando-se aos aspectos necessários para ilustrar a utilidade da abordagem espectral no estudo de grafos simples.

A apresentação dos conceitos deste capítulo tem como principais referências (ABREU, 2005; ABREU et al., 2007), que exploram de forma sistemática a teoria espectral de grafos e suas conexões com a álgebra linear, além de (HEFEZ; FERNANDEZ, 2012), utilizada como suporte para os conceitos fundamentais de álgebra linear empregados ao longo do texto. Essas referências fornecem o embasamento teórico necessário para a compreensão do espectro de grafos e fundamentam a análise dos exemplos apresentados neste capítulo e no capítulo seguinte.

O **espectro** de uma matriz é definido pelo conjunto dos seus autovalores. Como estamos trabalhando com grafo simples e sua representação através da matriz de adjacência, analisaremos o conjunto dos autovalores dessa matriz. Assim, para chegarmos ao espectro por um caminho é necessário apresentarmos o **polinômio característico** de um grafo.

Definição 3.1. O **polinômio característico** da matriz de adjacência $A(G)$ de G , $\det(\lambda I - A(G))$, onde I é uma matriz identidade de mesma ordem que $A(G)$, também é considerado o polinômio característico do próprio grafo G e é denotado por $p_G(\lambda)$. Caso λ seja uma raiz de $p_G(\lambda)$, então ele é chamado **autovalor** do grafo G .

Definição 3.2. Se a matriz de adjacência $A(G)$ possuir s autovalores distintos de modo que $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$ com multiplicidades iguais, respectivamente, a $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_s)$, ou seja, o número de vezes que esse autovalor é raiz do polinômio, então o **espectro do grafo** G , denotado como $spect(G)$, é definido por uma matriz $2 \times s$, de modo que a primeira linha seja os autovalores de $A(G)$ inseridos em ordem decrescente e a segunda, pela suas respectivas multiplicidades. Essa matriz é escrita da seguinte forma:

$$spect(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

O maior autovalor de G , λ_1 , é denominado **índice** (ou **raio espectral**) de G e representado por $ind(G)$.

Exemplo 5. Considere o grafo G da Figura 22:

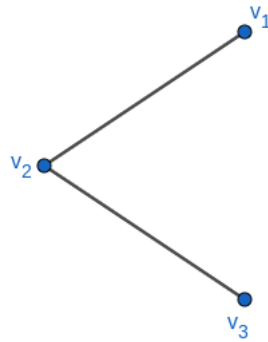


Figura 22 – Grafo simples com 3 vértices. **Fonte:** Do próprio autor

Sua matriz de adjacência é dada por:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com a matriz $A(G)$ definida, podemos calcular o $\det(\lambda I - A(G))$ e achar o polinômio característico de G . Daí,

$$p_G(\lambda) = \det(\lambda I - A(G)) = \lambda^3 - 2\lambda.$$

Com isso, temos que:

$$\lambda \text{ é raiz de } p_G \iff \lambda^3 - 2\lambda = 0$$

$$\text{As raízes são } \lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = 0 \text{ e } \lambda_3 = -\sqrt{2}$$

Com as raízes encontradas, temos que o grau de suas multiplicidades são, respectivamente, $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 1$ e $m(\lambda_3) = 1$.

Com os autovalores e o grau das multiplicidades definidas, temos que o espectro de G é dado pela matriz

$$\text{spect}(G) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, temos que $\text{ind}(G) = \sqrt{2}$.

Proposição 3.1. *Considere um grafo G com n vértices e $|E|$ arestas e seja*

$$p_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + a_2\lambda^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

o polinômio característico de G . Então os coeficientes $p_G(\lambda)$ satisfazem:

- (I) $a_1 = 0$;
- (II) $a_2 = -|E|$;
- (III) $a_3 = -2t$, onde t é o número de triângulos do grafo.

Demonstração. Seja $A(G)$ a matriz de adjacência de um grafo G com n vértices e

$$p_G(\lambda) = \det(\lambda I - A(G)) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

o seu polinômio característico.

Da Álgebra Linear, sabe-se que, para cada $i = 1, \dots, n$, o coeficiente a_i satisfaz

$$a_i = (-1)^i \sum \det(A'),$$

onde a soma é tomada sobre todas as submatrizes principais A' de ordem i de $A(G)$.

Assim, cada coeficiente a_i pode ser interpretado como a soma, com sinal alternado, dos determinantes das submatrizes principais de ordem i da matriz de adjacência.

- (I) O a_1 corresponde as submatrizes principais com 1 linha e 1 coluna. Como estamos trabalhando com grafos simples, sabemos que a diagonal principal de $A(G)$ é formada apenas por zeros, pois não apresenta laços. Logo, é trivial que

$$a_1 = 0$$

- (II) Já o a_2 trata das submatrizes principais com 2 linhas e 2 colunas. Para que o determinante da matriz 2×2 não seja nulo é necessário que a matriz seja da forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, para cada par de vértices adjacentes, temos uma única submatriz principal com determinante -1 , ou seja, qualquer par de vértices adjacentes em G , será acrescentará -1 na soma de a_2 , então se G possui $|E|$ arestas, daí

$$a_2 = (-1) \times |E| = -|E|$$

(III) Por fim, o a_3 corresponde submatrizes principais com 3 linhas e 3 colunas. Para uma submatriz principal 3×3 sabemos que temos $3!$ possibilidades de matrizes diferentes, no entanto, dessas possibilidades, somente uma tem determinante não nulo e igual a 2 e corresponde a vértices mutuamente adjacentes, ou seja, um triângulo..

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, $(-1)^3 a_3 = 2 \times t$ e portanto $a_3 = -2 \times t$, onde t é o numero de triângulos do grafo, como esperávamos demonstrar.

□

Definição 3.3. Dois grafos G e H que possuem os mesmos autovalores e respectivas multiplicidades são chamados de **grafos coespectrais**, ou seja, $spect(G) = spect(H)$.

Se os grafos G e H forem isomorfos, então eles são coespectrais. De fato, pela Propriedade 2.8, existe uma matriz de permutação P tal que $A(G) = P^{-1}A(H)P$, daí temos

$$\begin{aligned} p_G(\lambda) &= \det(\lambda I - A(G)) \\ &= \det(\lambda P^{-1}IP - P^{-1}A(H)P) \\ &= \det(P^{-1}(\lambda I - A(H))P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(\lambda I - A(H)) \det(P) \\ &= \det(\lambda I - A(H)) = p_H(\lambda). \end{aligned}$$

Logo,

$$p_G(\lambda) = p_H(\lambda) \Rightarrow spect(G) = spect(H).$$

No entanto, vale ressaltar que a recíproca não é verdadeira, ou seja, dois grafos podem possuir o mesmo espectro, porém, não serem isomorfos.

Observe que, os grafos abaixo são visivelmente diferentes, possuem matrizes de adjacência diferentes, a saber, X e Y .

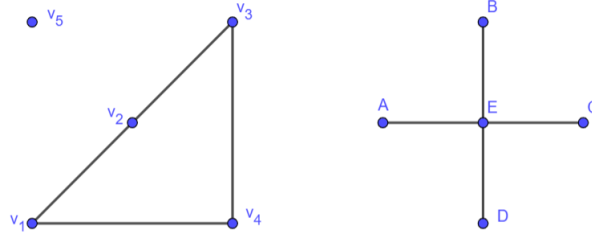


Figura 23 – Grafo X e Y coespectrais. **Fonte:** Do próprio autor

$$A(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

No entanto, os grafos X e Y possuem o mesmo espectro, já que seus polinômios característicos são dados por

$$p_X(\lambda) = p_Y(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3 = \lambda^3(\lambda^2 - 4)$$

E com isso, temos que o espectro é da seguinte forma:

$$\text{spect}(X) = \text{spect}(Y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que eles não são isomorfos, já que o grafo X possui um vértice isolado e o grafo Y não tem vértice isolado, é conexo.

Além de estabelecermos relações entre grafos coespectrais, também é possível estabelecer uma relação entre a matriz $A(G)$ e seus autovalores de acordo com o lema abaixo:

Lema 3.1. *Se $A(G)$ é uma matriz diagonalizável, então a soma dos autovalores de $A(G)$ é igual ao traço $\text{tr}(A(G))$.*

Demonstração. Dos resultados de álgebra linear sabemos que $A(G)$ é diagonalizável, pois é uma matriz simétrica de entradas reais. Então, existe uma matriz ortogonal B tal que

$$A(G) = B^{-1}DB$$

onde D é a matriz diagonal com os autovalores de $A(G)$. Ainda da álgebra linear, temos que para duas matrizes quadradas G e H de ordem n ,

$$\begin{aligned} \text{tr}(GH) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} h_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ji} g_{ij} \\ &= \text{tr}(HG). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{tr}(A(G)) = \text{tr}(B^{-1}DB) = \text{tr}(DBB^{-1}) = \text{tr}(DI) = \text{tr}(D).$$

□

A partir da demonstração desse lema e de propriedades vistas no capítulo anterior, temos a seguinte proposição abaixo:

Proposição 3.2. *Considere um grafo G com n vértices e $|E|$ arestas. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores de $A(G)$, então temos:*

$$(I) \text{ tr}(A(G)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0;$$

$$(II) \text{ tr}(A(G)^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2|E|;$$

$$(III) \text{ tr}(A(G)^3) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 = 6t, \text{ onde } t \text{ é o número de triângulos do grafo};$$

Exemplo 6. Vamos considerar um exemplo de um grafo G abaixo:

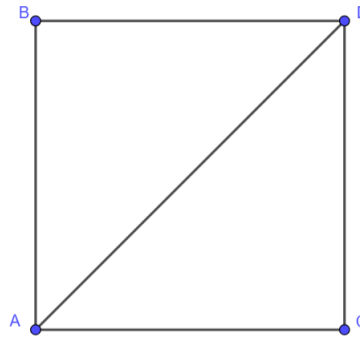


Figura 24 – Grafo G . Fonte: Do próprio autor

Sua $A(G)$ é definida da forma:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

E calculando $\det(\lambda I - A(G))$, temos seu polinômio característico:

$$p_\lambda(G) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$$

Suas raízes são (arredondadas):

$$\lambda_1 = 2,562, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1,562 \text{ e } \lambda_4 = -1$$

$$\text{spect}(Y) = \begin{bmatrix} 2,562 & 0 & -1,562 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(I) Sabemos que $\text{tr}(A(G)) = \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

(II) Sabemos que $A(G)^2$ nos revela caminhos fechados de tamanho 2, indo e voltando na mesma aresta, resultando assim no dobro de número de arestas, logo: $2 \times 5 = 10$. Agora, se fizermos o somatório $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2$, veremos que:

$$(2,562)^2 + 0^2 + (-1,562)^2 + (-1)^2 = 10 = 2 \times 5$$

Onde o 5 representa o número total de arestas do grafo G .

(III) De forma análoga ao item (II), sabemos que $A(G)^3$ revela caminhos fechados de comprimento 3 que representam triângulos no grafo, e cada triângulo pode ser formado de $3! = 6$ maneiras distintas. Neste exemplo que estamos usando é visível que esse grafo G possui 2 triângulos formados pelos vértices ABD e ACD ou por opção mais viável, as submatrizes principais que os representam, já que

$$ABD = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = ACD$$

logo: $6 \times 2 = 12$. Em relação á $\text{tr}(A(G)^3) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^3$, observa-se que:

$$(2,562)^3 + 0^3 + (-1,562)^3 + (-1)^3 = 12$$

4 Exemplos e Aplicações

Após a apresentação dos conceitos fundamentais da teoria espectral de grafos e o estudo do espectro associado à matriz de adjacência, este capítulo tem como objetivo aplicar os resultados teóricos desenvolvidos anteriormente à análise espectral de classes específicas de grafos simples. O foco recai sobre exemplos clássicos da teoria dos grafos, como caminhos, ciclos e grafos completos, buscando evidenciar de forma concreta a relação entre a estrutura combinatória desses grafos e o comportamento de seus autovalores.

A escolha desses grafos justifica-se por sua relevância teórica e por permitirem uma descrição explícita do espectro, o que os torna especialmente adequados a um estudo de caráter introdutório. Por meio da análise espectral desses exemplos, torna-se possível observar como propriedades como regularidade, conectividade e simetria refletem-se diretamente no conjunto de autovalores da matriz de adjacência. Em particular, destacam-se resultados clássicos que descrevem o espectro de grafos ciclo, grafos regulares e grafos completos, permitindo a obtenção de fórmulas fechadas para seus autovalores.

Além dos exemplos teóricos, o capítulo também apresenta breves discussões sobre aplicações da teoria espectral de grafos em outras áreas do conhecimento, como química, redes elétricas e ciência de dados. Essas aplicações ilustram o papel da teoria espectral como uma ferramenta interdisciplinar, capaz de modelar e analisar sistemas reais por meio de grafos e de seus espectros.

Para o desenvolvimento deste capítulo, tomam-se como principais referências os trabalhos desenvolvidos em (ABREU et al., 2007), que apresentam resultados clássicos da teoria espectral de grafos, bem como estudos específicos sobre o espectro de caminhos e ciclos, como em (ÇELİK; CANGÜL, 2019) e em (JESUS, 2018). As aplicações em contextos interdisciplinares são fundamentadas em (SILVA, 2025), enquanto propriedades da matriz de adjacência utilizadas ao longo das análises baseiam-se em (RODRIGUES; ALMEIDA, 2019). Essas referências oferecem o suporte teórico necessário para a compreensão dos exemplos e aplicações discutidos a seguir.

Dessa forma, este capítulo consolida os conceitos apresentados nos capítulos anteriores, conectando teoria e prática por meio de exemplos concretos e evidenciando o potencial da teoria espectral de grafos como ferramenta de análise matemática e aplicada.

Propriedade 4.1. *Considere o grafo C_n , ciclo de comprimento n . O conjunto dos seus autovalores são da forma:*

$$\lambda_i = 2 \cos \left(\frac{2\pi i}{n} \right), \text{ com } i = 1, 2, \dots, n$$

Exemplo 7. Considerando a Figura 25 a seguir que representa um grafo C_3 como exemplo:

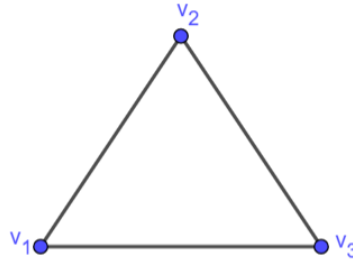


Figura 25 – Grafo C_3 . **Fonte:** Do próprio autor

Aplicando a propriedade temos que os autovalores são:

- $\lambda_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi 1}{3}\right) = 2 \times \frac{-1}{2} = -1$
- $\lambda_2 = 2 \cos\left(\frac{2\pi 2}{3}\right) = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{-1}{2} = -1$
- $\lambda_3 = 2 \cos\left(\frac{2\pi 3}{3}\right) = 2 \cos(2 \times \pi) = 2 \times 1 = 2$

De fato, se calculando as raízes do polinômio característico de C_3 , temos:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Seu polinômio característico e suas raízes são:

$$p_G(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

$$\lambda_0 = 2, \lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = -1$$

Note que, dado um grafo do tipo ciclo precisamos saber apenas o número de vértices para encontrarmos os autovalores do mesmo. Além disso, essa propriedade também nos garante as multiplicidades dos autovalores. No exemplo anterior temos

$$\text{spect}(C_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Já que o autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ se repete duas vezes.

Propriedade 4.2. *Seja G um grafo k -regular, então são satisfeitas:*

- k é um autovalor de G ;

- G é conexo $\iff k$ tem multiplicidade 1;
- $\forall \lambda$ de G , $k \geq |\lambda|$;

A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada em ((ABREU et al., 2007), pág 36).

Exemplo 8. Considere G um grafo 2-regular como o da figura a seguir

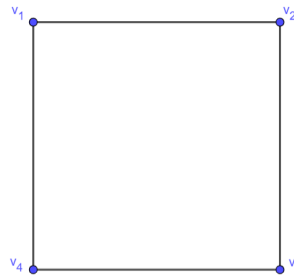


Figura 26 – Grafo 2-regular. **Fonte:** Do próprio autor

Sua matriz de adjacência $A(G)$ é dada por

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando seu polinômio característico, temos

$$p_G(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 \text{ e} \\ \lambda_0 = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ e } \lambda_3 = -2$$

Logo, seu espectro é:

$$\text{spect}(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observa-se que, de fato:

- $k = 2$ é um autovalor e é o índice $\text{ind}(G)$ de G ;
- G é conexo, pois 2 tem multiplicidade 1;
- $2 \geq |0|$ e $2 \geq |-2|$

Propriedade 4.3. Seja K_n um grafo completo com n vértices, tem-se que:

$$p_{K_n}(\lambda) = (\lambda - n + 1)(\lambda + 1)^{n-1} \quad \text{e}$$

$$\text{spect}(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 9. Considere o grafo completo K_4 a seguir

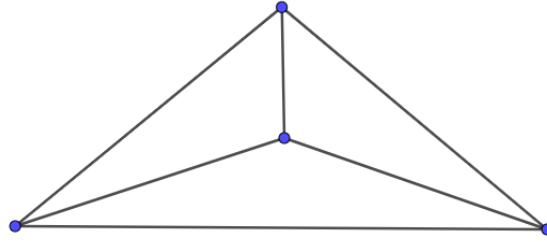


Figura 27 – Grafo K_4 . **Fonte:** Do próprio autor

Como sabemos que o número de vértices é $n = 4$, podemos substituí-lo em $p_{K_4}(\lambda)$ e na matriz do seu espectro, logo:

$$p_{K_4}(\lambda) = (\lambda - 4 + 1)(\lambda + 1)^{4-1}$$

$$p_{K_4}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^3$$

$$\text{spect}(K_4) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

De fato, se calcularmos pela sua matriz de adjacência, chegaremos na mesma equação do polinômio característico $p_{K_4}(\lambda)$. No entanto, essa propriedade específica para grafos completos nos economiza tempo, ainda mais para grafos com índices de número de vértices maiores. Além disso, observe que as entradas s_{11} e s_{22} de $\text{spect}(K_4)$ são os mesmos valores que o grau de todos os vértices que, por definição, $d(v_0) = d(v_1) = \dots = d(v_n) = n - 1 = 3$.

Do ponto de vista histórico, a teoria espectral de grafos teve um impulso significativo a partir de suas aplicações na Química Quântica, em especial nos trabalhos de Hückel sobre a modelagem de moléculas de hidrocarbonetos não saturados. Nesse contexto, os níveis de energia dos elétrons em determinadas moléculas passaram a ser associados aos autovalores de grafos que representavam a estrutura molecular, evidenciando uma conexão profunda entre propriedades físicas e características espectrais. Essa abordagem marcou um dos primeiros usos sistemáticos da teoria espectral de grafos fora do contexto puramente matemático e contribuiu para consolidar a área como uma ferramenta interdisciplinar.

Desde então, a teoria espectral de grafos passou a desempenhar um papel relevante em diversas áreas do conhecimento, destacando-se pela sua capacidade de modelar sistemas

complexos e extrair informações estruturais a partir de autovalores e autovetores. Em particular, sua atuação pode ser observada em áreas como a química, a engenharia elétrica e a ciência de dados, conforme descrito a seguir.

Na área da química, a teoria espectral de grafos é utilizada, por exemplo, em:

- **Química Quântica**, na qual grafos são empregados para representar moléculas e os autovalores estão associados a níveis de energia eletrônica;
- **Árvores químicas**, usadas na modelagem de compostos orgânicos e na análise de propriedades estruturais de moléculas;
- **Química computacional**, em que métodos baseados em grafos auxiliam na simulação, classificação e comparação de estruturas moleculares.

Na área de redes elétricas, a teoria espectral de grafos contribui para a modelagem e análise de sistemas de potência, estando relacionada a:

- **Problemas de oscilações acopladas**, nos quais o espectro de matrizes associadas à rede fornece informações sobre estabilidade e sincronização;
- **Modelagem e otimização de redes**, permitindo estudar a conectividade e a eficiência do sistema elétrico;
- **Fluxo de potências**, em que grafos representam a topologia da rede e ferramentas espectrais auxiliam na análise do comportamento do sistema.

Na ciência de dados, a teoria espectral de grafos tem ganhado destaque devido ao crescimento das redes complexas e à necessidade de métodos eficientes para sua análise. Entre suas aplicações, destacam-se:

- **Cálculo de custo mínimo** e problemas de caminhos ótimos em redes;
- **Otimização combinatória**, em que grafos modelam relações entre dados e restrições;
- **Uso de softwares computacionais**, como GAP e Python, que permitem a implementação de algoritmos espectrais para análise de grafos de grande escala.

A combinação da teoria espectral de grafos com outras áreas do conhecimento tem ampliado significativamente sua relevância nos últimos anos, especialmente em um cenário marcado pelo crescimento de dados complexos e interconectados. Dessa forma, a teoria espectral de grafos consolida-se não apenas como um campo teórico importante da matemática, mas também como uma ferramenta poderosa para a modelagem e análise de problemas reais em diferentes contextos científicos e tecnológicos.

Considerações finais

O presente trabalho teve como objetivo apresentar uma introdução à teoria espectral de grafos por meio do estudo da matriz de adjacência e de seus autovalores, com foco em grafos simples e exemplos acessíveis ao nível de graduação. Ao longo do texto, foram discutidos conceitos fundamentais da teoria dos grafos, a representação matricial dessas estruturas e os principais elementos da teoria espectral associados à matriz de adjacência, evidenciando a estreita relação entre a álgebra linear e a matemática discreta.

Inicialmente, foram apresentados os fundamentos da teoria dos grafos, estabelecendo a base conceitual necessária para o desenvolvimento do trabalho. Em seguida, a matriz de adjacência foi introduzida como ferramenta central, permitindo a tradução das relações de adjacência dos grafos para um contexto algébrico. A partir dessa representação, foi possível explorar propriedades importantes, como o grau dos vértices, a contagem de caminhos e a identificação de subestruturas, preparando o terreno para a análise espectral.

No capítulo dedicado à teoria espectral de grafos, foram apresentados o polinômio característico, os autovalores e o espectro de um grafo, bem como algumas propriedades básicas que relacionam esses elementos a características estruturais, como o número de arestas e a presença de triângulos. Os resultados discutidos reforçam o papel da matriz de adjacência como um objeto matemático capaz de sintetizar informações relevantes sobre a estrutura dos grafos.

Por fim, no capítulo de exemplos e aplicações, a teoria desenvolvida foi aplicada à análise espectral de classes específicas de grafos, como caminhos, ciclos, grafos regulares e grafos completos. Esses exemplos permitiram observar, de maneira concreta, como propriedades estruturais refletem-se no comportamento dos autovalores, além de evidenciar a existência de fórmulas e resultados clássicos que simplificam a determinação do espectro em grafos particulares. Também foram apresentadas breves discussões sobre aplicações da teoria espectral de grafos em áreas como química, redes elétricas e ciência de dados, destacando seu caráter interdisciplinar.

Ressalta-se que este trabalho possui caráter introdutório e expositivo, não tendo como objetivo esgotar o tema nem apresentar resultados inéditos. Entre as principais limitações, destaca-se o foco exclusivo na matriz de adjacência e em grafos simples de pequena ordem, o que restringe a análise a um conjunto específico de ferramentas e aplicações. Além disso, resultados mais avançados da teoria espectral de grafos não foram abordados, por exigirem um aparato teórico mais aprofundado.

Como perspectivas para trabalhos futuros, sugere-se o estudo de outras matrizes associadas a grafos, como a matriz Laplaciana e a Laplaciana normalizada, bem como

a investigação de suas propriedades espectrais. Outras possibilidades incluem conexões com processos estocásticos, como cadeias de Markov, o estudo de grafos maiores com o auxílio de softwares computacionais e a aplicação da teoria espectral em problemas contemporâneos de redes complexas.

Dessa forma, espera-se que este trabalho contribua para a compreensão inicial da teoria espectral de grafos no contexto da graduação, servindo como ponto de partida para estudos mais aprofundados e evidenciando o potencial da álgebra linear como ferramenta de análise de estruturas combinatórias.

Referências

- ABREU, N. de. Teoria espectral dos grafos: um híbrido entre a álgebra linear e a matemática discreta e combinatória com origens na química quântica. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 1, p. 1–10, 2005. [25](#)
- ABREU, N. M. M. d. et al. Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações. *Notas em Matemática Aplicada*, v. 27, p. 25, 2007. [9](#), [17](#), [25](#), [32](#), [34](#)
- ÇELİK, F.; CANGÜL, İ. On the spectra of cycles and paths. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, Turkic World Mathematical Society, v. 9, n. 3, p. 571–580, 2019. [32](#)
- HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. d. S. Introdução à álgebra linear. *Rio de Janeiro: SBM*, v. 146, 2012. [25](#)
- JESUS, J. V. O. de. *Introdução à teoria espectral de grafos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade da Madeira (Portugal), 2018. [32](#)
- RODRIGUES, J. C. d. R. S.; ALMEIDA, A. C. L. Propriedades da matriz de adjacência em grafos simples. 2019. [17](#), [32](#)
- SILVA, A. G. C. d. Modelagem e otimização de redes elétricas de transmissão visando o balanço de potência via teoria espectral de grafos. 2025. [32](#)