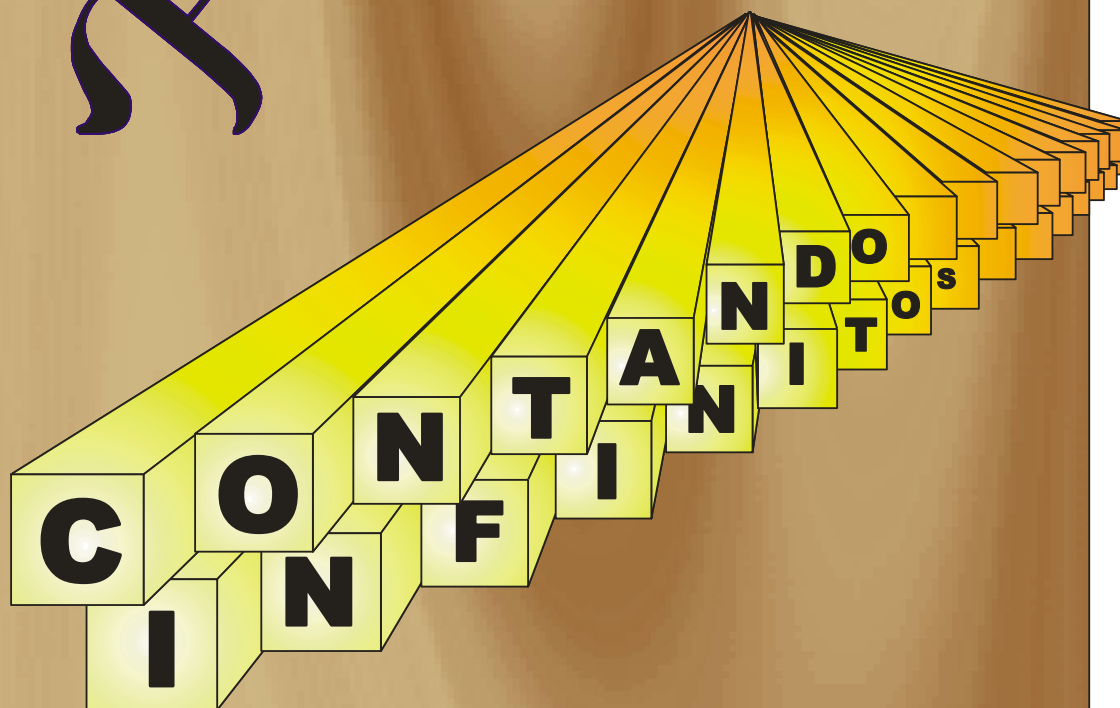




por

Ledo Vaccaro Machado

CONTANDO INFINITOS

Por

Ledo Vaccaro Machado

Se lhe fosse feita a pergunta — existem mais letras na primeira ou na segunda linha deste texto — provavelmente o leitor faria:

na primeira linha existem 1, 2, 3, ..., k letras e
na segunda linha existem 1, 2, 3, ..., m letras,

depois compararia os números k e m e responderia.

Entretanto, contar é um processo anterior e mais simples do que qualquer sistema de numeração. Supondo que não fosse conhecido qualquer sistema de numeração, como poderíamos responder à pergunta anterior? Seria possível respondê-la? Poderíamos formar pares usando a seguinte regra: a primeira letra da primeira linha com a primeira letra da segunda linha; a segunda letra da primeira linha com a segunda letra da segunda linha e assim por diante, formando uma relação "um-para-um". No final, poderíamos ter:

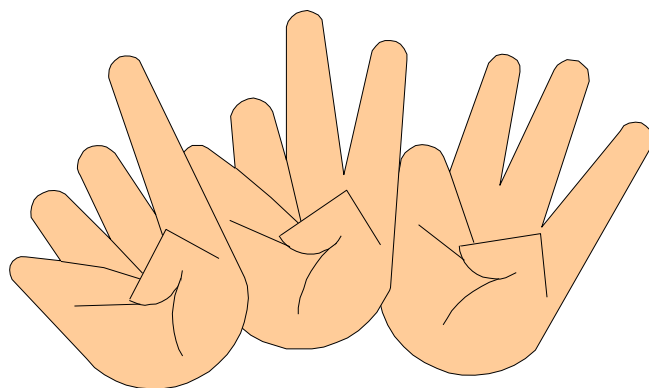
1º) as letras da primeira linha acabaram antes das letras da segunda linha e concluiríamos que existem mais letras na segunda linha que na primeira;

2º) não sobraram letras em nenhuma das linhas, o que significaria que a quantidade de letras da primeira linha coincide com a quantidade de letras da segunda linha;

3º) sobraram letras na primeira linha, logo, há mais letras na primeira.

Contar consiste exatamente nisto — montar um relacionamento de um-para-um entre dois conjuntos. O sistema de numeração é tão comum para nós que quase não nos apercebemos disto, apesar de fazê-lo. Um exemplo: Carlos Antunes, preparando uma festa, lembra-se das pessoas que vai convidar: João Fernandes e sua esposa, Mário Alfredo, Clotilde . . . e, enquanto vai listando os convidados, levanta um dedo da mão para cada nome

enunciado. Assim, está montando um relacionamento um-para-um entre os nomes dos convidados e os dedos da mão, ou seja, está contando. Mesmo quando usamos um sistema de numeração para fazer a contagem, estamos montando uma relação um-para-um entre os elementos do conjunto que queremos contar e os elementos do sistema de numeração.



Se construirmos uma relação um-para-um entre os elementos de um conjunto e um sistema de numeração, formando k pares, e, através de uma relação um-para-um, formarmos também k pares entre o sistema de numeração e um segundo conjunto, podemos afirmar que os dois conjuntos têm a mesma quantidade de elementos, ou seja, os dois conjuntos são "similares". Chamando de C_1 e de C_2 o primeiro e o segundo conjunto, respectivamente, teremos:

C_1 é similar a k elementos do sistema.
 C_2 é similar a k elementos do sistema.
 Logo, C_1 é similar a C_2 .

A esta propriedade chamamos de transitiva.

Muitas vezes temos certeza de que dois conjuntos são similares sem necessitarmos apresentar todos os pares ordenados formados pelos elementos dos dois conjuntos. Sem dúvida, se considerarmos todas as pessoas vivas, a quantidade de cabeças é igual a quantidade de pessoas e, para fazer esta afirmação, não necessitamos apresentar todos os pares formados com os elementos destes dois conjuntos. Assim, também, se não existisse poligamia em lugar nenhum do mundo, a quantidade de maridos seria igual a quantidade de esposas.

Façamos, agora, outra pergunta. Existem mais números pares ou ímpares?

Montando uma relação um-para-um teremos:

0	2	4	6	8	10	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	3	5	7	9	11	...

É claro que estes dois grupos são similares. Basta criar a regra — cada número par relaciona-se com o seu sucessor, ou seja, cada número par relaciona-se com ele mesmo mais um.

Existe uma novidade neste problema em relação a tudo o que vimos até aqui, a saber, em todos os exemplos anteriores seria possível, pelo menos teoricamente, ainda que demorasse muito, formar todos os pares entre os dois conjuntos. Aqui é impossível tal execução.

Compliquemos um pouco mais. Existem mais números naturais¹ ou números pares?

O leitor seria levado a afirmar que existem mais naturais que pares já que estes formam uma parte daqueles. Cuidado! Não estamos mais no campo das quantidades finitas e, na dimensão dos infinitos, as regras ordinárias nem sempre surtem efeitos. Observe:

0	1	2	3	4	5	6	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	2	4	6	8	10	12	...

Podemos montar uma relação um-para-um entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos pares pela regra — cada número natural relaciona-se com o seu dobro. No campo dos infinitos, nem sempre o todo é maior que a parte.

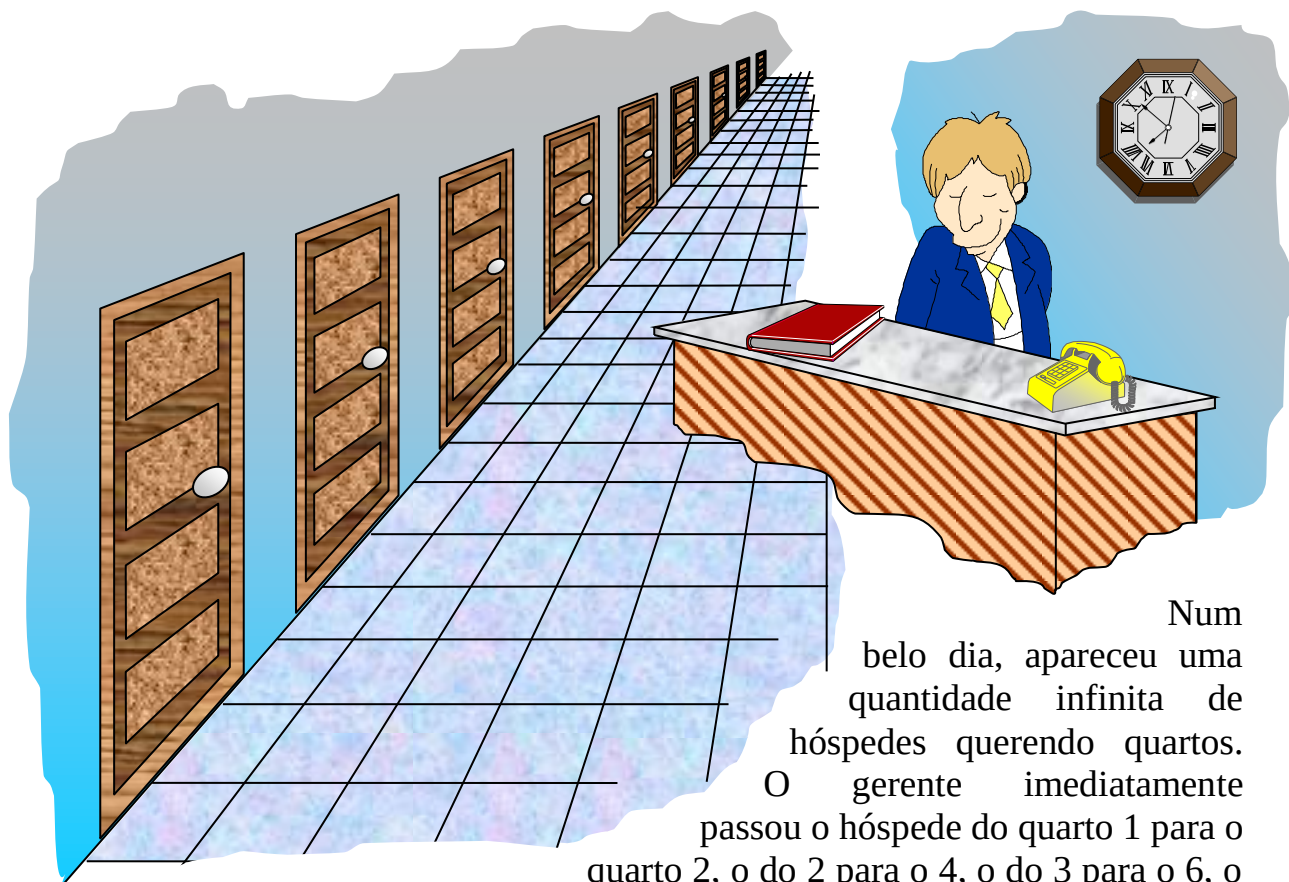
Qualquer conjunto que possa ser posto numa relação um-para-um com o conjunto dos números naturais tem a mesma quantidade de elementos que os naturais. A quantidade de números naturais (ou a infinidade dos naturais) Georg Cantor (1845 – 1911) representou através da letra hebraica $\aleph$ (aleph) com o índice zero. Este é um número **transfinito**; um número que representa uma quantidade infinita. Entramos no campo dos cardinais infinitos e, como já dissemos, as regras ordinárias nem sempre são aplicáveis aqui. Tomemos um exemplo de David Hilbert (1862 – 1943) para ilustrar.

Imaginemos um hotel com uma infinidade de quartos e uma infinidade de hóspedes, com todos os quartos ocupados. De repente chega um senhor querendo alugar um quarto. O gerente não se intimida:

— Claro que temos, diz o gerente, e passa o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o do quarto 2 para o quarto 3, o do 3 para o 4 e assim por diante, deixando o quarto 1 livre para o novo hóspede.

¹ Números naturais são os elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, ou o que Bertrand Russell (1872 – 1970) chamou de "números indutivos".

Se aparecesse uma quantidade finita n de novos hóspedes também não haveria problema. Seria só passar o hóspede do quarto 1 para o quarto $n + 1$, o do quarto 2 para o quarto $n + 2$ e assim sucessivamente, deixando os n primeiros quartos desocupados.



Num belo dia, apareceu uma quantidade infinita de hóspedes querendo quartos. O gerente imediatamente passou o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o do 2 para o 4, o do 3 para o 6, o do quatro 4 para o 8, deixando, assim, os quartos ímpares desocupados, podendo acomodar todos os novos hóspedes.

Deste exemplo, não é difícil concluir que, no campo dos cardinais infinitos:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

$$\aleph_0 + n = \aleph_0, \text{ onde } n \text{ é um número finito,}$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

E ainda é possível mostrar que:

$$\aleph_0^2 = \aleph_0,$$

$$\aleph_0^n = \aleph_0, \text{ onde } n \text{ é um número finito.}$$

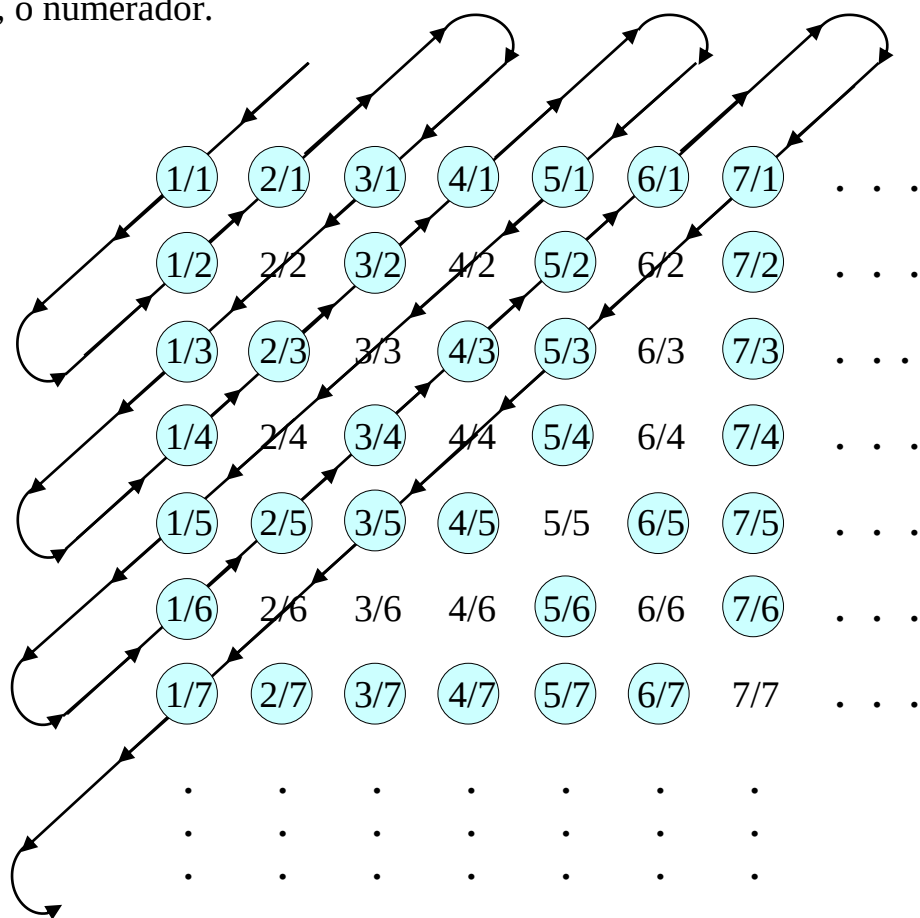
Já no tocante a subtração e a divisão, os resultados não são tão "simples". Analisemos as subtrações:

- 1) $\aleph_0$ menos n , onde n é um número finito $\rightarrow$ resta $\aleph_0$;
- 2) $\aleph_0$ menos todos os naturais maiores ou igual $n \rightarrow$ restam os naturais de 0 a $n - 1$, ou seja, n ;
- 3) $\aleph_0$ menos todos os pares $\rightarrow$ restam todos os ímpares, ou seja, resta $\aleph_0$.

As três são maneiras diferentes de subtração com $\aleph_0$.

Será que existe um transfinito maior que $\aleph_0$? Busquemos uma resposta. Talvez o número de racionais² seja maior que o número de naturais.

Na verdade, por esse caminho não conseguiremos encontrar um transfinito maior que $\aleph_0$. Vamos construir uma relação de um-para-um entre as frações e os números naturais dispondo as primeiras em uma tabela de linhas e colunas, onde a posição das linhas determina o denominador, e a das colunas, o numerador.



² Número racional é aquele que pode ser escrito na forma p/q (fração) com p e q inteiros e $q \neq 0$.

Obedecendo o caminho das setas e tomando apenas as frações que apresentam no numerador e no denominador números primos entre si³ (aquelas que estão em um círculo), podemos montar a sequência:

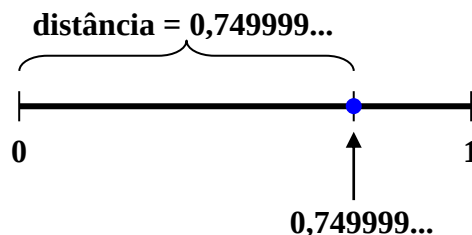
1, $\frac{1}{2}$, 2, 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, 4, 5, $\frac{1}{5}$, ...

Obviamente, mais cedo ou mais tarde, qualquer racional que se considere aparecerá nesta sequência. Podemos montar uma relação um-para-um entre esta e os números naturais. Logo, existem tantos racionais quanto naturais.

O leitor pode estar pensando, a essa altura, que não existe outro transfinito, um transfinito maior que $\aleph_0$. Se assim o fez, enganou-se.

Consideremos o conjunto de todos os pontos de um segmento unitário⁴. Cada ponto será dado por sua distância de uma das extremidades. Essa distância será dada por um decimal infinito⁵. Suponhamos que alguém alegue ter feito uma disposição linear desses decimais para que seja possível relacioná-los um-para-um com os naturais. Provemos que tal disposição é impossível. Suponhamos que a disposição fosse:

0,3243567021 ...
 0,0675113498 ...
 0,4563876515 ...
 0,7659834012 ...
 0,0045327886 ...
 0,3415288673 ...
 0,4435567711 ...
 0,6543879624 ...



³ Chamamos de "números primos entre si" aqueles que só admitem para divisor comum a unidade. Consideramos, também, que 1 é primo de qualquer número.

⁴ Na verdade estamos trabalhando com a infinidade dos números reais, já que o axioma de Cantor-Dedekind nos diz que "os pontos de uma reta podem ser posto em correspondência biunívoca com os números reais".

⁵ O decimal 0,5 pode ser escrito na forma 0,49999

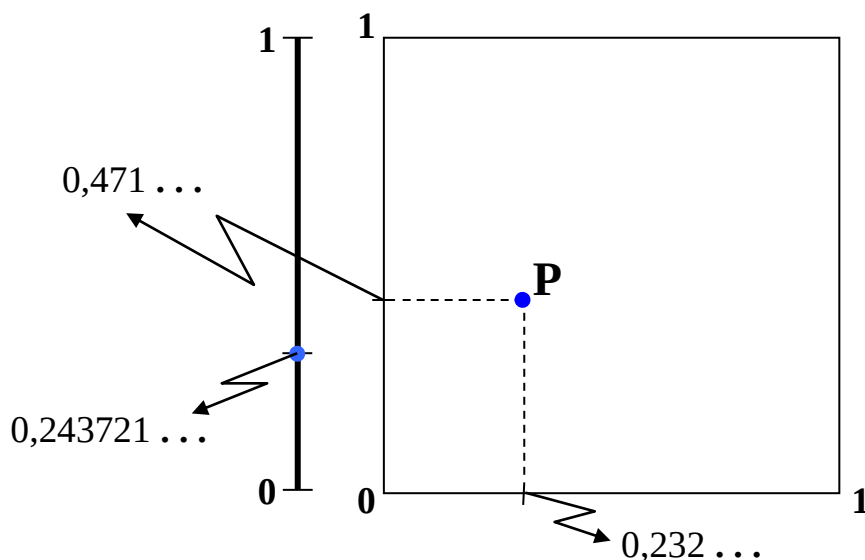
Provemos que nessa sequência não estão presentes todos os decimais. Construíamos o decimal tal que a primeira casa não seja igual a primeira casa do primeiro decimal da sequência; a segunda casa não seja igual a segunda casa do segundo decimal da sequência; a terceira, não seja igual a terceira casa do terceiro decimal da sequência e assim por diante. Este número poderia ser:

0,	4	8	3	5	0	3	9	1	...
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
	3	6	6	9	3	8	7	6	
	não	não	não	não	não	não	não	não	

Este decimal não está incluído na sequência. Por mais que ele se pareça com um decimal da n -ésima posição, sua n -ésima casa decimal não será a mesma.

O número de pontos de um segmento é maior que o número de naturais. A este número, Georg Cantor chamou de $\aleph_1$, o segundo transfinito. Ele expressa, também, o número de números reais⁶ existentes.

É interessante observar que o número de pontos de um quadrado é igual ao número de pontos de um segmento. Tomemos um segmento unitário e um quadrado de lado unitário. Seja um ponto deste segmento, por exemplo 0,243721



⁶ Pelo critério de Weierstrass, um número real é aquele que pode ser escrito na forma $k,a_1a_2a_3a_4 \dots$, onde k é um número inteiro e $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$.

Podemos separar esse decimal em outros dois através da regra de, em um, usar as casas de ordem par e, no outro, as casas de ordem ímpar. Assim,

$$0,471 \dots \text{ e } 0,232 \dots$$

Fazendo estes últimos, respectivamente, como ordenada e abscissa de um ponto P do quadrado, podemos relacionar o ponto $0,243721 \dots$ do segmento de reta com o ponto $P(0,232 \dots ; 0,471 \dots)$ do quadrado. Da mesma forma, sendo $(0,324 \dots ; 0,158 \dots)$ as coordenadas de um ponto M do quadrado, podemos relacionar M com o ponto $0,312548 \dots$ do segmento. Temos, aqui, uma relação um-para-um entre os pontos do segmento e os pontos do quadrado. A cada ponto do segmento corresponde um, e somente um, ponto do quadrado; a cada ponto do quadrado corresponde um, e somente um, ponto do segmento. Ou seja, o número de pontos do quadrado também é $\aleph_1$.

Usando um raciocínio análogo, podemos mostrar que o número de pontos de um cubo também é $\aleph_1$.

Poderíamos nos estender e fazer a seguinte afirmação: o número de pontos do espaço, de um plano e de uma reta é o mesmo, ou seja, o conjunto de pontos do espaço, o de pontos de um plano e o de pontos de uma reta são similares.

O número de curvas, de todas as espécies, é maior do que o número de pontos do espaço e é expresso por $\aleph_2$. O conjunto dos cardinais infinitos prossegue sem parar através de $\aleph_2$, $\aleph_3$, $\aleph_4$, $\aleph_5$ etc.

O que poderia ser expresso por $\aleph_3$?

BIBLIOGRAFIA

- Russell, Bertrand, INTRODUÇÃO À FILOSOFIA MATEMÁTICA (Zahar Editores — 1981)
- Gamow, Georg UM, DOIS, TRÊS, . . . INFINITO (Zahar Editores — 1981)
- Boyer, Carl B., HISTÓRIA DA MATEMÁTICA (Editora Edgard Blücher — 1983)
- Halmos, Paul Richard, TEORIA INGÊNUA DOS CONJUNTOS (Editora Polígono — 1973)