



Disciplina: *Cálculo C/ Cálculo Diferencial e Integral II*

Prof. Victor Martins

Lista de exercícios: Derivadas, máximos e mínimos de funções de várias variáveis

- (1) Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$ e suponha $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$. Determine $g'(0)$.
- (2) Determine as derivadas parciais de primeira ordem de $f(x, y) = \int_y^x \cos(t^2) dt$.
- (3) Disseram-lhe que existe uma função f cujas derivadas parciais são

$$f_x(x, y) = x + 4y \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 3x - y$$

e cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Você deve acreditar nisso?

- (4) Seja $f(u, v, w)$ diferenciável. Mostre que, se $u = x - y$, $v = y - z$ e $w = z - x$, então $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$.
- (5) Considere a equação

$$x^2z + z^2y - 2xyz - 7 = 0,$$

onde z é dada implicitamente como função de x e y . Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ no ponto $(2, -1, 1)$.

- (6) Se $z = \sin(x + \sin y)$, mostre que $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
- (7) Use a regra da cadeia para achar $\frac{dz}{dt}$:

- (a) $z = x^2 + y^2 + xy$; $x = \sin t$, $y = e^t$
(b) $z = \cos(x + 4y)$; $x = 5t^4$, $y = \frac{1}{t}$
(c) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$; $x = \ln t$, $y = \cos t$

- (8) Use a regra da cadeia para achar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$:

- (a) $z = x^2y^3$; $x = s \cos t$, $y = s \sin t$
(b) $z = \sin \theta \cos \phi$; $\theta = st^2$, $\phi = s^2t$

(c) $z = e^{x+2y}; \quad x = \frac{s}{t}, \quad y = \frac{t}{s}$

(9) Seja $z = f(u^2 + v^2, uv)$, onde $f(x, y)$ é uma função diferenciável. Expresse $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f .

(10) Seja $F(t) = f(e^{t^2}, \sin(t))$, onde $f(x, y)$ é uma função diferenciável. Expresse $F'(t)$ em termos das derivadas parciais de f . Calcule $F'(0)$ supondo $f_y(1, 0) = 5$.

(11) Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente cada uma das três variáveis x, y e z como funções das outras duas: $z = f(x, y)$; $y = g(x, z)$; $x = h(y, z)$. Se F é diferenciável e F_x, F_y e F_z são não nulos, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1.$$

(12) Determine, no ponto indicado, uma equação do plano tangente e da reta normal ao gráfico das superfícies abaixo:

(a) $z = \ln(x + y); \quad P = (2, -1, 0)$

(b) $z = e^x \cos y; \quad P = (0, \pi, -1)$

(c) $z = \frac{2}{\sqrt{4 - 2x^2 - y^2}}; \quad P = (1, 1, 2)$

(13) Determine a equação de um plano que seja tangente a superfície $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ e paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$.

(14) Determine a equação de um plano que seja tangente a superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{7}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

(15) Determine a equação do plano que é tangente ao parabolóide $z = 2x^2 + 3y^2$ e paralelo ao plano $4x - 3y - z = 10$.

(16) Considere a superfície $z^2 = x^2 + y^2$.

(a) Determine a equação do plano tangente a essa superfície no ponto (a, b, c) .

(b) Mostre que este plano intersecciona o plano xy na reta $ax + by = 0$.

(17) Mostre que todo plano tangente a $z = x^2 - y^2$ intersecciona esta superfície em duas retas perpendiculares.

(18) Determine a derivada direcional da função dada no ponto P e na direção de v .

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2; \quad P = (2, 1); \quad v = (\cos(\frac{\pi}{6}), \sin(\frac{\pi}{6}))$

(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2); \quad P = (1, 0); \quad v = (\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3}))$

(c) $f(x, y) = e^y \cos x + e^x \cos y; \quad P = (0, 0); \quad v = (1, 1)$

(d) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2; \quad P = (1, 1, 1); \quad v = (\cos(\frac{\pi}{3}), \cos(\frac{\pi}{4}), \cos(\frac{2\pi}{3}))$

- (19) Seja $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$.
- Ache o gradiente de f .
 - Ache o gradiente de f no ponto $P = (1, 3, 1)$.
 - Ache a taxa de variação de f em P na direção do vetor $u = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$.
- (20) Ache a taxa de variação máxima de $f(x, y, z) = \frac{x+y}{z}$ no ponto $P = (1, 1, -1)$ e a direção em que ela ocorre.
- (21) A função diferenciável $z = f(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.
- (22) Considere a função $f(x, y) = \frac{\cos(y^2)}{x}$.
- Determine a taxa de variação máxima de f em $(1, \sqrt{\pi})$ e a direção em que isso ocorre.
 - Determine a derivada direcional de f em $(1, \sqrt{\pi})$ na direção $v = (2, 1)$.
 - Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem de f e as calcule no ponto $(1, \sqrt{\pi})$.
- (23) Considere a função $f(x, y) = ye^{-xy}$.
- Calcule o gradiente de f .
 - Determine todas as direções em que a derivada direcional de f no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.
 - Alguma das direções do item (b) é a direção de maior crescimento? Justifique sua resposta.
- (24) Seja $f(x, y) = e^{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.
- Determine e esboce o domínio de f .
 - Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(1, 1)$.
 - Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 1)$ e na direção do vetor $v = (-1, 2)$.
 - Determine a direção segundo a qual a derivada direcional é máxima no ponto $(1, 1)$. Qual é essa taxa de variação máxima?
- (25) Classifique os pontos críticos das funções abaixo:
- $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 6x - 27y + 2$
 - $f(x, y) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 + x + y$
 - $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$
 - $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

(e) $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$

- (26) Encontre os valores de máximo e mínimo absolutos de f sujeito a restrição dada em cada item:

(a) $f(x, y) = x + 3y + 5; \quad x^2 + y^2 = 1$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + y; \quad x^2 + y^2 = 1$

(c) $f(x, y) = y^2 - 4xy + 4x^2; \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$

- (27) Decomponha o número 100 na soma de três números positivos tais que o produto entre eles seja máximo.
- (28) Um fio de cobre de comprimento a deve ser dividido em três partes tais que o produto dos comprimentos das partes seja o máximo. Determine o comprimento dessas partes.
- (29) Determine o ponto do plano $x + 2y + 3z = 6$ mais próximo da origem.
- (30) De todos os paralelepípedos retangulares cuja soma das três arestas é constante e igual a a , qual é o que tem volume máximo?
- (31) Determine o ponto da reta interseção dos planos $x + y + z = 1$ e $3x + 2y + z = 6$ mais próximo da origem.
- (32) Determine os valores máximo e mínimo de $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 16$.
- (33) Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ na região $x^2 + y^2 \leq 16$.