



Prova 2 - 28/08/2025

Nome: _____ Matrícula: _____

Questão 1: (1,5 pontos) Seja A um anel com unidade e $a \in A$. Mostre que $I = \{x \in A : x \cdot a = 0\}$ é um ideal à esquerda de A .

Questão 2: (1,5 pontos) Enuncie:

- (a) o Algoritmo da Divisão para o anel de polinômios $\mathbb{K}[x]$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo;
- (b) o Teorema da Fatoração Única para polinômios em $\mathbb{K}[x]$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo;
- (c) o Critério de Eisenstein

Questão 3: (3,0 pontos) Mostre que:

- (a) se n é um número primo, então o ideal $I = n\mathbb{Z}$ é um ideal maximal em $\mathbb{Z}$.
- (b) se $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, com $\mathbb{K}$ corpo, e $p(x)$ é de grau 2 ou 3, então $p(x)$ é redutível sobre $\mathbb{K}$ se e só se existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $p(\alpha) = 0$.

Questão 4: (1,5 pontos) Seja A um anel comutativo com unidade $1 \in A$, e seja P um ideal de A . Dizemos que P é um **ideal primo** de A se $P \neq A$ e para todos $x, y \in A$, se $x \cdot y \in P$ então $x \in P$ ou $y \in P$. Mostre que se P é um ideal primo de A e I e J são ideais de A tais que $IJ \subset P$, então $I \subset P$ ou $J \subset P$. (**Observação:** IJ denota o conjunto $\{ab : a \in I, b \in J\}$)

Questão 5: (2,5 pontos) Assinale (V) para as afirmações verdadeiras e (F) para as afirmações falsas. Demonstre ou dê um contraexemplo, para justificar sua resposta.

- (a) () $8x^3 - 6x - 1$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.
- (b) () Em $\mathbb{Z}_8[x]$, $\bar{4}x^2 + \bar{2}x + \bar{4}$ é um divisor de zero.
- (c) () Se D é um domínio de integridade, um polinômio redutível em $D[x]$, necessariamente, tem raiz em D .
- (d) () $\mathbb{Z}_{15}$ possui 6 divisores de zero.
- (e) () $x^3 + 2x^2 + 10$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

BOA PROVA!