



Prova 2 - 30/04/2019

(Questões sem justificativas não serão consideradas, portanto apresente as justificativas para cada solução.)

Nome: _____ Matrícula: _____

Questão 1: (1,0 ponto) Dados dois conjuntos não vazios A e B , define-se o **produto cartesiano** de A e B , denotado por $A \times B$, como sendo o conjunto dos pares ordenados com primeira coordenada em A e segunda coordenada em B , isto é,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Mostre que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Questão 2: (1,5 pontos) Mostre que existe (ou não) e determine o supremo e ínfimo do conjunto $X = \{a^n : n \in \mathbb{N}^*\}$, com $a \in \mathbb{Q}$ e $1 < a$.

Questão 3:

- (a) (0,5 pontos) Enuncie o Princípio de Indução.
- (b) Uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1 é uma sequência $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ em que o quociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ é sempre igual a q , para todo $n \geq 2$. Considere uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1 . Usando indução prove que:

(i) (1,0 ponto) $a_n = a_1 q^{n-1}$;

(ii) (1,0 ponto) A soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é dada por

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Questão 4:

- (a) (0,5 pontos) Enuncie o Princípio da Boa Ordenação.
- (b) (1,0 ponto) Utilize o PBO para mostrar que não existe número inteiro entre 0 e 1.
- (c) (0,5 pontos) Mostre que não existe número inteiro entre a e $a + 1$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Questão 5: (3,0 pontos) Coloque **V** para as afirmações verdadeira e **F** para as falsas. Prove ou dê contra-exemplos em cada uma das afirmações.

(a) () O supremo de um conjunto quando existe é único;

(b) () $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq |x| + |y|$;

(c) () O conjunto dos números irracionais é enumerável;

(d) () Para todo natural n , $n^2 + n + 41$ é primo;

(e) () O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Questão extra: (1,0 ponto) Explique de maneira objetiva a seguinte afirmação:

“ \mathbb{R} é um corpo arquimediano ordenado completo.”

BOA PROVA!