



Disciplina: *Álgebra Linear II*  
Prof. *Victor Martins*

## Lista 4: Operadores diagonalizáveis

- (1) (a) Defina autovalor de um operador  $T$ ;  
(b) Defina autoespaço de  $T$  associado a um autovalor  $\lambda$ .  
(c) Defina autovetor de  $T$  associado a um autovalor.  
(d) O que significa dizer que um operador linear é diagonalizável?
- (2) Em cada um dos casos abaixo, decida se o operador linear  $T : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  dado por sua matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  é diagonalizável. Em caso positivo, calcule uma base de autovetores e sua forma diagonal.

(a)  $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

(b)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

- (3) Defina multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica de um autovalor  $\lambda$  de  $T$ .
- (4) Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador e  $V$  espaço sobre  $\mathbb{K}$ . Mostre que se  $p_T$  tiver todas as suas raízes em  $\mathbb{K}$  e se elas forem simples, isto é, com multiplicidade algébrica 1, então  $T$  é diagonalizável.
- (5) Seja  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  definido por

$$T(x, y, z) = \left( 2x, \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z \right).$$

Encontre:

- (a) o polinômio característico de  $T$ ;
- (b) os autovalores de  $T$ ;
- (c) os autoespaços de  $T$ ;
- (d) uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$  formada por autovetores de  $T$  e  $[T]_{\mathcal{B}}$ .

(6) Sejam  $V = P_2(\mathbb{R})$  e  $T \in \mathcal{L}(V)$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

onde  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$  e  $\mathcal{C} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x + x^2\}$ .

(a) Encontre o polinômio característico de  $T$ .

(b) Verifique se  $T$  é diagonalizável. Caso seja, encontre uma base de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

(7) Sejam  $V = P_2(\mathbb{R})$  e  $T \in \mathcal{L}(V)$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

onde  $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1x^2\}$  e  $\mathcal{C} = \{x, 1 + x + x^2, 1 - x\}$ .

(a) Encontre o polinômio característico de  $T$ .

(b) Verifique se  $T$  é diagonalizável. Caso seja, encontre uma base de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

(8) Seja  $A$  uma matriz de ordem 2 simétrica em  $M_2(\mathbb{R})$  (isto é, tal que  $A^t = A$ ). Mostre que  $A$  é diagonalizável.

(9) Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear que tem como autovetores  $(3, 1)$  e  $(-2, 1)$  associados aos autovalores  $-2$  e  $3$ , respectivamente. Calcule  $T(x, y)$ .

(10) Ache os autovalores de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e de  $A^{-1}$ .

(11) Seja  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  uma transformação linear cuja matriz em relação à base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é dada por

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine uma matriz inversível  $M \in M_4(\mathbb{R})$  tal que  $M^{-1}[T]_{\mathcal{B}}M$  seja uma matriz diagonal.

(12) Decida se as seguintes matrizes são ou não diagonalizáveis. Em caso afirmativo encontre uma base de autovetores.

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$