Prova 1 - Matemática Básica II

12/05/2022

Questão 1:

a) Queremos determinar y de tal modo que

$$d(A,B) = 2\sqrt{5},$$

onde $A(-1,4)$, $B(3,y)$. Temos

$$d(A,B) = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-y)^2} = 2\sqrt{5},$$

elevando ao quadrado a igualdade, temos:

$$(-1-3)^2 + (4-y)^2 = 20 \Rightarrow$$

$$16 + 16 - 8y + y^2 = 20 \Rightarrow$$

$$y^2 - 8y + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{8 \pm 4}{2} \Rightarrow \boxed{y_1 = 6}; \boxed{y_2 = 2} //$$

—— // ——

b) Queremos determinar a relação entre x e y de tal forma que tenhamos

$$d(M,A) = d(M,B),$$

onde $M(x,y)$, $A(6,2)$ e $B(-1,5)$.
Então temos

$$d(M,A) = d(M,B) \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2} \Rightarrow$$

$$(x-6)^2+(y-2)^2 = (x+1)^2+(y-5)^2 \Rightarrow$$

$$x^2-12x+36+y^2-4y+4 = x^2+2x+1+y^2-10y+25 \Rightarrow$$

$$-14x+6y+14 = 0 \Rightarrow \boxed{-7x+3y+7=0}$$

—————//—————

e) Queremos determinar a relação entre x e y de tal forma que

$$d(P,A) < d(P,B),$$

onde $P(x,y)$, $A(4,1)$ e $B(2,5)$. Então temos,

$$d(P,A) < d(P,B) \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} < \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2} \Rightarrow$$

$$x^2-8x+16+y^2-2y+1 < x^2-4x+4+y^2-10y+25 \Rightarrow$$

$$-4x+8y-12<0 \Rightarrow \boxed{x-2y+3<0}$$

—————— // ——————

Questão 2:

a) Queremos determinar x de tal modo que $(2, x^2-1)$ e $(-6,4)$ sejam vetores perpendiculares. Logo, temos

$$(2, x^2-1)\cdot(-6,4) = 0 \Rightarrow$$

$$-12+4(x^2-1) = 0 \Rightarrow$$

$$-12+4x^2-4 = 0 \Rightarrow$$

$$4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow$$

$$x = \pm 2$$

—————— // ——————

b) v é um vetor tal que $\|v\| = 2$ e o ângulo entre u e v é $60°$, onde $u = (3,0)$.

Note que, $\|u\| = 3$ e sabemos que

$$\cos 60° = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{u \cdot v}{3 \cdot 2} \Rightarrow u \cdot v = 3$$

Seja $v = (x, y)$ então:

$$u \cdot v = 3 \Rightarrow (3,0) \cdot (x,y) = 3$$

$$\Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\|v\| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow 1 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{3}}$$

Portanto, $v = (1, \sqrt{3})$ ou $v = (1, -\sqrt{3})$

—— // ——

e) Por hipótese, $\|u\| = \|v\|$, mostremos que $u+v$ e $u-v$ são perpendiculares, ou seja, que o produto escalar entre esses vetores é 0.

$$(u+v)\cdot(u-v) = u\cdot u - u\cdot v + v\cdot u - v\cdot v$$
$$= u\cdot u - \cancel{u\cdot v} + \cancel{u\cdot v} - v\cdot v$$
$$= \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0,$$

pois $\|u\| = \|v\|$.

———— // ————

Questão 3:

Geometricamente ao multiplicarmos um vetor v por uma constante k poderemos aumentar ou diminuir o comprimento de v, além de também poderemos alterar o sentido de v.
Em resumo o vetor kv tem a mesma direção de v e se $k>0$. também terá o mesmo sentido de v, porém se $k<0$, o sentido de kv

será o oposto de v.

Como

$$\|kv\| = |k| \, \|v\|,$$

se $0 < |k| < 1$, kv terá comprimento menor que v.

se $|k| > 1$, kv terá comprimento maior que o de v.

—— // ——

Questão 4:

a) (V)

De fato, se $k \neq 0$ e $ku = 0$ então

$$ku = 0 \Rightarrow \frac{ku}{k} = \frac{0}{k} \Rightarrow \boxed{u = 0}$$

—— // ——

b) (F)

Por exemplo, considere os pontos $P(1,1)$ e $Q(-2,-2)$. Note que P está no primeiro quadrante sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares e Q está no terceiro quadrante sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares. Mas $R(1-2, 1-2) = R(-1,-1)$ está no terceiro quadrante.

—————//—————

e) (F)

Por exemplo, considere os vetores $u = (1,-1)$ e $v = (1,1)$, note que

$$u \cdot v = (1,-1) \cdot (1,1) = 1 - 1 = 0,$$

mas $u \neq 0$ e $v \neq 0$

—————//—————