Álgebra linear

Notas de aula

PROF. DR. VICTOR DO NASCIMENTO MARTINS

Universidade Federal do Espírito Santo
Campus de Alegre

PREFÁCIO

O propósito dessas notas de aula é fornecer um material de apoio sucinto e objetivo para a disciplina de *Álgebra linear* que compõe a grade de disciplinas obrigatórias dos cursos de licenciatura em matemática, ciências da computação, engenharia química, licenciatura em física e sistemas de informação da Universidade Federal do Espírito Santo, campus de Alegre. Sendo assim, o principal foco foi cobrir todo conteúdo de tal disciplina, que aparece descrito na seção Conteúdo Programático deste material. Além do conteúdo teórico, apresentamos exercícios cujas resoluções são importantes para uma complementação da aprendizagem dos assuntos apresentados na disciplina.

Ressaltamos que para uma melhor compreensão do conteúdo e um aprofundamento maior dos tópicos aqui apresentados, o aluno deverá, sempre que possível, consultar as referências bibliográficas indicadas.

Essas notas foram iniciadas após a primeira experiência do autor ministrando a disciplina no primeiro semestre de 2022. É importante ressaltar ainda que este material estará em constante processo de atualização. Portanto, quaisquer correções, sugestões e comentários serão bem recebidos a fim de torná-lo mais completo possível, visando atender aos estudantes da disciplina.

Alegre, setembro de 2022.

Victor Martins

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

Sistemas Lineares e Matrizes. Espaços Vetoriais. Transformações Lineares. Diagonalização de Operadores Lineares.

Horas/aula	**Tópicos**
	PARTE I
20	Espaços vetoriais reais. Espaço das matrizes. Sistemas lineares. Matrizes de um sistema linear. Multiplicação de matrizes. Matriz inversa. Determinantes. Discussão de sistemas
	PARTE II
16	Corpos. Espaços vetoriais. Subespaços vetoriais. Operações com subespaços. Subespaços gerados. Dependência e independência linear. Bases e dimensão
	PARTE III
24	Transformações lineares. Núcleo e Imagem de uma transformação linear. Teorema do núcleo e da imagem. Isomorfismo.Transformações lineares inversas. Transformações lineares e matrizes. Composição de transformações lineares. Operadores lineares. Autovalores e autovetores. Diagonalização de operadores

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No decorrer deste material quando estivermos falando dos números naturais $\mathbb{N}$, estamos nos referindo ao conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Quando estivermos interessados em incluir o zero neste conjunto utilizaremos a notação $\mathbb{N}_0$, isto é, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Os principais objetos de estudo da álgebra linear são os chamados **espaços vetoriais**. Os espaços mais utilizados e que são os modelos mais claros para entender as definições que serão apresentadas são os espaços $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, ou seja, o produto cartesiano de n cópias da reta real $\mathbb{R}$. Para $n = 2$ e $n = 3$ temos representações geométricas:

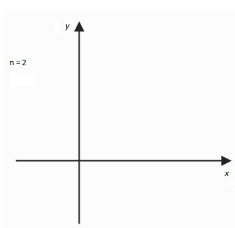


Figura 1: Representação geométrica de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$

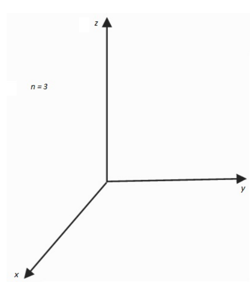


Figura 2: Representação geométrica de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Para $n \geq 4$ não temos uma representação geométrica, mas o $\mathbb{R}^4$ pode ser visto como o espaço-tempo da física, em que os pontos são da forma (x, y, z, t), com as três primeiras coordenadas representando a posição no espaço de uma partícula e a última representando o instante t em que essa partícula ocupa tal posição.

Trataremos os elementos de $\mathbb{R}^n$ como vetores, onde a soma é definida por

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

e a multiplicação do vetor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pelo número real a, chamado de **escalar**, é definida por

$$a \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n).$$

Os espaços $\mathbb{R}^n$ são utilizados em vários ramos do conhecimento sob vários pontos de vista e com diversas estruturas adicionais. Em álgebra linear a estrutura utilizada é a de espaço vetorial que é induzida por um corpo. Isso é o mínimo que precisamos para estudar por exemplo, sistemas de equações lineares com várias incógnitas.

Dividimos este material em quatro capítulos, sendo que o Capítulo 4 trata de casos particulares da principal definição dada no Capítulo 3. Assim, de certa forma, temos um material dividido em 3 partes, onde a terceira parte é composta dos capítulos 3 e 4.

No Capítulo 1, optamos por iniciar com a principal definição da disciplina: espaço vetorial. Ainda que apresentemos apenas a definição de espaços vetoriais reais, veremos no capítulo seguinte que a definição de espaço vetorial é análoga apenas permitindo que os escalares estejam em um corpo qualquer. Após apresentar a definição de espaço vetorial real, estudamos o espaço vetorial das matrizes em detalhes. Nosso principal objetivo com isso é utilizar as ferramentas matriciais a resolução de sistemas lineares, o que finaliza o capítulo.

No Capítulo 2, apresentamos a definição geral de espaço vetorial e estudamos mais detalhadamente tal estrutura. Faremos um estudo sobre os subespaços vetoriais e temos por objetivo estudar conjuntos "mínimos" que caracterizam todo o espaço vetorial, as chamadas bases de um espaço vetorial.

No Capítulo 3, apresentamos um estudo sobre algumas aplicações entre espaços vetoriais, as chamadas transformações lineares. Dentre essas, daremos uma particular atenção as bijeções, que nos permitem obter informações de um espaço vetorial analisando outro espaço vetorial diferente. Veremos no fim deste capítulo que podemos associar matrizes as transformações lineares.

No Capítulo 4, iremos estudar um caso particular de transformações lineares, os chamados operadores lineares, que são transformações lineares de um espaço nele próprio. Nosso objetivo será obter matrizes mais simples que descrevam esses operadores. Em particular, estaremos interessados em operadores diagonalizáveis, ou seja, aqueles que possuem uma representação matricial dada por uma matriz diagonal.

Além da teoria apresentada neste material de maneira mais objetiva e através de alguns exemplos, também faz parte do texto dez listas de exercícios. Os exercícios têm o objetivo de auxiliar na fixação dos conteúdos apresentados e algumas vezes complementar o texto.

CAPÍTULO 1

ESPAÇO VETORIAL DE MATRIZES

1.1 Espaços vetoriais reais

Um conjunto não vazio V será dito um **espaço vetorial real** (ou um $\mathbb{R}$ **- espaço vetorial**) se estiverem definidas uma adição em V e uma multiplicação por escalar de $\mathbb{R}$ em V:

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \to & V \\ & (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & (a, v) & \mapsto & a \cdot v \end{array}$$

satisfazendo:

(A1) A adição é associativa, isto é,

$$(u + v) + w = u + (v + w), \quad \forall\ u, v, w \in V.$$

(A2) A adição é comutativa, isto é,

$$u + v = v + u, \quad \forall\ u, v \in V.$$

(A3) A adição possui **elemento neutro**, ou seja, existe $0 \in V$, tal que, dado $u \in V$, $u + 0 = u$.

(A4) A adição possui **elementos simétricos**, ou seja, para todo $u \in V$, existe $-u \in V$, tal que

$$u + (-u) = 0.$$

(ME1) $a(u + v) = au + av, \quad \forall\ a \in \mathbb{R},\ u, v \in V.$

(ME2) $(a + b)u = au + bu, \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R},\ u \in V.$

(ME3) $(a \cdot b)u = a(bu), \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R},\ u \in V.$

(ME4) $1 \cdot u = u, \quad \forall\, u \in V$.

Os elementos de V serão chamados **vetores** e os elementos de $\mathbb{R}$ de **escalares**. O elemento $0 \in V$ será chamado de **vetor nulo** e o elemento $-v \in V$ de **vetor oposto** de v.

Observe que para qualquer $a \in \mathbb{R}$, se 0 é o vetor nulo do espaço vetorial real V, então vale $a \cdot 0 = 0$. De fato, dado $a \in \mathbb{R}$ e $0 \in V$, como $0 + 0 = 0$, pela propriedade (ME1), temos

$$a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Somando o simétrico $-a \cdot 0$ de $a \cdot 0$ a ambos os lados da igualdade acima e utilizando as propriedades (A4), (A1) e (A3), temos

$$0 = a0 + (-a0) = (a0 + a0) + (-a0) = a0 + [a0 + (-a0)] = a0 + 0 = a0.$$

Exemplo 1.1 *Considere $V = \mathbb{R}^2 = \{(x,y):\ x,y \in R\}$ e as seguintes operações definidas em V:*

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad x_1,y_1,x_2,y_2 \in \mathbb{R}$$
$$a \cdot (x_1,y_1) = (ax_1, ay_1), \quad a, x_1, y_1 \in \mathbb{R}.$$

O vetor nulo neste caso é $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. O vetor simétrico de (x,y) é $(-x,-y)$. É possível mostrar que V satisfaz todas as condições da definição de espaço vetorial real e portanto $\mathbb{R}^2$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Exemplo 1.2 *$\mathbb{R}^n$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial para todo n inteiro positivo.*

Exemplo 1.3 *Considere o conjunto dos números complexos $\mathbb{C} = \{a + bi:\ a,b \in \mathbb{R} \quad e \quad i^2 = -1\}$. Definimos a soma de dois números complexos e a multiplicação de um número real por um número complexo como segue:*

$$(a+bi) + (c+di) = (a+b) + (c+d)i, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},$$

$$\alpha \cdot (a+bi) = \alpha a + \alpha bi, \quad a,b,\alpha \in \mathbb{R}.$$

Com as definições acima é possível mostrar que $\mathbb{C}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Exemplo 1.4 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e $V = \mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R}\}$ o conjunto das funções reais de domínio X. Definimos em $\mathcal{F}$ uma adição e uma multiplicação por números reais da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathcal{F} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ & (f,g) & \longmapsto & f+g, \end{array}$$

dada por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in X$. E

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ & (\alpha,f) & \longmapsto & \alpha \cdot f, \end{array}$$

dada por $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, *para todo* $x \in X$. *Vamos mostrar que* $\mathcal{F}$ *é um espaço vetorial real. Sejam* $f, g, h \in \mathcal{F}$, $x \in X$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- *A1.*

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x) \\ &= f(x) + g(x) + h(x) \\ &= (f + (g+h))(x) \\ &= (f + (g+h))(x) \end{aligned}$$

  Portanto $(f+g)+h = f+(g+h)$.

- *A2.*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x) \Rightarrow f+g = g+f.$$

- *A3. Note que a função constante zero é o vetor nulo, isto é, a função*

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{F}} : \ X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0, \end{aligned}$$

  é tal que $f + 0_{\mathcal{F}} = f$ *para todo* $f \in \mathcal{F}$.

- *A4. Considere a função* f^- *definida por:*

$$\begin{aligned} f^- : \ X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -f(x), \end{aligned}$$

  e observe que

$$(f+f^-)(x) = f(x) + f^-(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow f + f^- = 0_{\mathcal{F}}.$$

- *ME1.*

  $\alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f + \alpha g)(x) \Rightarrow \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g.$

- *ME2.*

  $((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f + \beta f)(x) \Rightarrow (\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f.$

- *ME3.*

$$((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f)(x) \Rightarrow (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f).$$

- *ME4. A função constante* 1 *é tal que* $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \Rightarrow 1 \cdot f = f$, *para todo* $f \in \mathcal{F}$

Portanto $\mathcal{F}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Exemplo 1.5 $\mathbb{R}^2$ *com as operações definidas abaixo não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, 0), \quad \alpha, x_1, y_1 \in \mathbb{R}.$$

De fato,

$$1 \cdot (x_1, y_1) = (1x_1, 0) = (x_1, 0) \neq (x_1, y_1),$$

sempre que $y_1 \neq 0$.

Exemplo 1.6 *Seja $P(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x_n + \cdots : \ a_i \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}, \ n > 0\}$ o conjunto dos polinômios em uma variável real. Com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar $P(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real.*

1.1.1 Exercícios

(1) Dado n um inteiro positivo, seja $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : \ a_i \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n de uma variável com coeficientes reais. Mostre que $P_n(\mathbb{R})$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(2) Dados $a, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, considere as seguintes operações definidas em $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$a(x_1, y_1) = (3ax_1, 3ay_1).$$

Mostre que com essas operações, $\mathbb{R}^2$ não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(3) Dados $a, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, considere as seguintes operações definidas em $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$$

$$a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1).$$

(a) Mostre que com essas operações vale a associatividade da adição em $\mathbb{R}^2$.

(b) Mostre que com essas operações vale a comutatividade da adição em $\mathbb{R}^2$.

(c) Determine um elemento neutro da adição definida em $\mathbb{R}^2$.

(d) Mostre que nem todo elemento de $\mathbb{R}^2$ terá um elemento oposto (simétrico) com a adição definida e conclua que com as operações dadas, $\mathbb{R}^2$ não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(4) Dados $a, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{R}$, considere as seguintes operações definidas em $\mathbb{R}^3$:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$$

$$a(x_1, y_1, z_1) = (ax_1, ay_1, az_1).$$

Mostre que com essas operações, $\mathbb{R}^3$ não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(5) Verifique se $\mathbb{R}^2$ com as operações abaixo é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$

$$a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1),$$

para quaisquer $a, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

(6) Verifique se $\mathbb{R}^2$ com as operações abaixo é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$a(x_1, y_1) = (a^2x_1, a^2y_1),$$

para quaisquer $a, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

(7) Sejam a um número real e v um elemento de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V. Mostre que, se $av = 0$ então $a = 0$ ou v é o vetor nulo de V.

(8) Seja v um elemento não nulo de um espaço vetorial real V. Mostre que a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & V \\ a & \longmapsto & av \end{array}$$

é injetora.

1.2 Matrizes e sistemas lineares

1.2.1 Matrizes

Dados dois números inteiros positivos m e n, uma **matriz** $m \times n$ (lê-se "matriz m por n") sobre um conjunto $\mathbb{K}$ é uma função da forma

$$\begin{array}{rccc} A: & \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (i, j) & \longmapsto & A(i, j) = a_{ij}. \end{array}$$

Toda matriz pode ser representada por uma tabela formada por $m \cdot n$ números dispostos em m linhas e n colunas da seguinte forma:

$$A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

As m-uplas $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ são as colunas da matriz.

As n-uplas $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ são as linhas da matriz.

a_{ij} é o elemento da linha i e coluna j e $m \times n$ é a **ordem** da matriz.

Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz, então as entradas a_{ii}, formam a **diagonal principal** de A.

Utilizaremos o símbolo $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ para denotar o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas no conjunto $\mathbb{K}$ e na maior parte deste material, estaremos interessados em matrizes sobre o conjunto dos números reais, ou seja, estaremos assumindo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A insistência na utilização de $\mathbb{K}$ em algumas definições e resultados é para enfatizar que mesmo que nosso foco sejam as matrizes reais, muitos dos resultados e definições podem ser estendidos para outros conjuntos.

Exemplo 1.7 *$A = [3]$ é uma matriz quadrada de ordem 1 e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 25 & -3 \\ 26 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ *é uma matriz de ordem* 3×5.

Algumas matrizes, por possuírem características específicas, recebem nomes especiais, como veremos em alguns exemplos a seguir:

- **Matriz coluna:** é toda matriz de ordem $m \times 1$, isto é, uma matriz que possui uma única coluna.

- **Matriz linha:** é toda matriz de ordem $1 \times n$, isto é, uma matriz que possui uma única linha.

- **Matriz nula:** é toda matriz tal que todas as suas entradas são nulas, isto é $a_{ij} = 0$ para todos i, j. A indicamos por $0_{m\times n}$.

- **Matriz quadrada:** é toda matriz em que o número de linhas é igual o número de colunas, isto é, $m = n$. Neste caso dizemos que a matriz tem ordem n.

- **Matriz diagonal:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz identidade:** é uma matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, isto é $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$. A matriz identidade de ordem n é denotada por I_n.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular superior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{p\times q}$ são iguais, isto é, $A = B$ se, e somente se, $m = p$, $n = q$, $a_{ij} = b_{ij}$ para todos $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

No conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas reais podemos definir uma operação de adição e uma multiplicação por escalar. Para isso, sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos a **adição** por

$$\begin{array}{rccc} + : & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ & (A,B) & \longmapsto & C, \end{array}$$

onde $C = (c_{ij})$, com $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todos $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. E definimos a **multiplicação por escalar** $\alpha \in \mathbb{R}$ como

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ (\alpha, A) & \longmapsto & C = \alpha A, \end{array}$$

onde $C = (c_{ij})$, com $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ para todos $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 1.8

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.9

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$$

Com essas duas definições acima, é possível mostrar que o conjunto das matrizes $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real. Portanto, dadas as matrizes A, B, C de ordem $m \times n$ e os números reais a, b, as seguintes propiedades envolvendo adição de matrizes e multiplicação por escalar são satisfeitas:

(A1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associatividade);

(A2) $A + B = B + A$ (comutatividade);

(A3) $A + 0_{m\times n} = A$ (elemento neutro);

(A4) $A + (-A) = 0_{m\times n}$ (elemento oposto);

(ME1) $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$;

(ME2) $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$;

(ME3) $(a \cdot b) \cdot A = a \cdot (b \cdot A)$;

(ME4) $1 \cdot A = A$;

1.2.2 Sistemas lineares

Uma **equação linear** é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as **incógnitas** ou **variáveis** e $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são os **coeficientes** reais. Não existe multiplicação de variáveis. E um **sistema linear** de m equações a n variáveis é um conjunto de m equações lineares como o que segue

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Uma **solução** para o sistema (1.1) é uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais que satisfaz simultaneamente todas as equações que compõem o sistema.

Exemplo 1.10

$$\left\{\begin{array}{c} 2x - y + 2z = 5 \\ -x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + 3z = 8 \end{array}\right. \qquad (5, 3, -1) \quad \textit{é uma solução do sistema (é a única solução!).}$$

Exemplo 1.11

$$\left\{\begin{array}{c} 2x - y = 7 \\ -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 10 \end{array}\right. \qquad \textit{Sistema que não tem solução.}$$

Exemplo 1.12

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{array}\right. \qquad (0, 0, 0) \quad \textit{é uma solução do sistema (é a única solução!).}$$

Exemplo 1.13

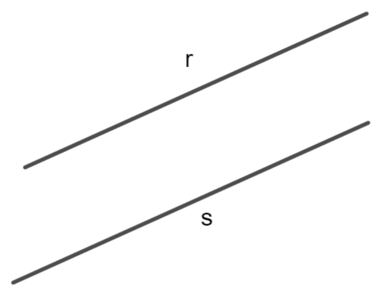
$$\left\{\begin{array}{c} 2x + y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\left(\frac{2}{3}t, \frac{5}{3}t, t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\} \quad \textit{são as infinitas soluções do sistema.}$$

Em alguns casos, podemos ter interpretações geométricas para um sistema linear. Por exemplo, um sistema linear em $\mathbb{R}^2$, isto é, um sistema do tipo

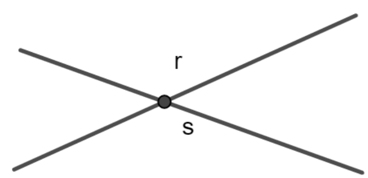
$$\left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right.$$

pode ser interpretado como a posição relativa entre duas retas a saber: a reta r que corresponde a primeira equação do sistema e a reta s que corresponde a segunda equação. Existem 3 possibilidades para este sistema:

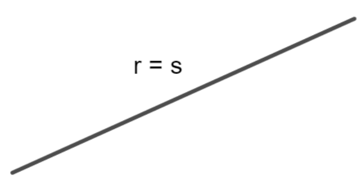
(i) Ele não possuir solução, ou seja, as retas serem paralelas (não coincidentes).



(ii) Ele possuir uma solução, ou seja, as retas são concorrentes.



(iii) Ele possuir infinitas soluções, ou seja, as retas são coincidentes.



Em $\mathbb{R}^3$, se tivermos um sistema com duas equações, ou seja, se tivermos as equações de dois planos, estes planos podem ser paralelos, logo o sistema não terá solução. Eles podem ser coincidentes, resultando em um sistema com infinitas soluções. Ou eles podem ter uma reta de intersecção, e neste caso, também teríamos um sistema com infinitas soluções.

Em geral, quando nos deparamos com um sistema linear, estamos interessados em discutir a solução deste sistema e, se possível, encontrar uma tal solução. Muitas vezes procuramos maneiras de transformar nosso sistema em algo mais fácil de resolver, mas nem sempre isso nos retornará todas as soluções do nosso sistema original. Por exemplo, considere o sistema linear genérico

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = y_m \end{array}\right. \tag{1.2}$$

e sejam $c_1, c_2, \ldots, c_m$ constantes reais. Vamos multiplicar a i-ésima equação do nosso sistema (1.2) pela constante c_i e em seguida somar todas as equações do sistema. Iremos obter

$$c_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)+\cdots+c_m(a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n) = c_1y_1+\cdots+c_my_m. \tag{1.3}$$

Toda solução de (1.2) é solução de (1.3), porém o caminho contrário não necessariamente é verdade, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.14

$$\left\{\begin{array}{c} 2x - y + 2z = 5 \quad \times(1) \\ -x + 3y - z = 5 \quad \times(2) \\ x + 2y + 3z = 8 \quad \times(-1) \end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} 2x - y + 2z = 5 \\ -2x + 6y - 2z = 10 \\ -x - 2y - 3z = -8 \end{array}\right.$$

Somando as equações do sistema modificado, obtemos

$$-x + 3y - 3z = 7.$$

Note que $(5, 3, -1)$ *é solução do sistema inicial e também da equação obtida depois de modificarmos o sistema. Além disso, isolando* x *na equação, obtemos*

$$x = 3y - 3z - 7.$$

Assim, $(3y - 3z - 7, y, z)$ *é uma forma geral para as soluções da equação. E fazendo* $y = z = 0$ *temos que* $(-7, 0, 0)$ *é solução da equação. Porém não é solução do sistema inicial.*

Definição 1.1 *Considere o sistema linear* (1.2) *e o sistema abaixo*

$$\left\{\begin{array}{c} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = z_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = z_2 \\ \cdots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n = z_m. \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Dizemos que (1.2) *e* (1.4) *são* ***equivalentes*** *se cada linha de cada um dos sistemas for obtida através de uma combinação das linhas do outro sistema.*

Dois sistemas equivalentes possuem o mesmo conjunto solução. Daí, a importância da busca por sistemas equivalentes mais fáceis de serem resolvidos. Algumas operações elementares sobre as linhas de um sistema nos retornam sistemas equivalentes. Vejamos quais são essas operações elementares:

(i) Troca de linha ($L_i \leftrightarrow L_j$).

(ii) Multiplicação de uma linha por um escalar ($L_i \leftrightarrow kL_i$).

(iii) Trocar uma linha pela soma dela com outra linha multiplicada por um escalar ($L_i \leftrightarrow L_i + kL_j$).

Exemplo 1.15

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow^{L_2 \leftrightarrow 2L_2} \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x - 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2} \begin{cases} -3y = 9 \\ -2x - 4y = 4 \end{cases}$$

daí temos

$$-3y = 9 \Rightarrow y = -3$$

e portanto,

$$-2x - 4(-3) = 4 \Rightarrow x = 4$$

e a solução do sistema é $(4, -3)$.

Exemplo 1.16

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow^{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{cases} x + 2y = 10 \\ -x + 3y = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow^{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + (-2)L_1}} \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 5y = 14 \\ -5y = -13 \end{cases}$$

daí temos $y = \dfrac{14}{5}$ *e* $y = \dfrac{13}{5}$, *o que é impossível, logo o sistema não tem solução.*

Exemplo 1.17

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow^{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow^{\substack{L_2 \to L_2 + (-1)L_1 \\ L_3 \to L_3 + (-2)L_1}} \begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ -3y + 5z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow^{L_3 \leftrightarrow L_3 + (-1)L_2} \begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ -3y + 5z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

daí temos $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$ *e a solução do sistema é* $(0, 0, 0)$.

Nosso objetivo ao efetuar as operações elementares em um sistema linear é gerar um sistema “mais simples” de resolver. Efetivamente, as operações são efetuadas nos coeficientes das variáveis, logo as operações podem ser adaptadas para que possam ser efetuadas somente nestes coeficientes (eliminando as variáveis).

1.2.3 Matriz de um sistema linear

Considere o sistema (1.2) dado anteriormente, a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & y_m \end{pmatrix}$$

é chamada a **matriz ampliada** do sistema (1.2) (ou **matriz completa**). Toda operação elementar sobre as linhas do sistema (1.2) corresponde uma operação (elementar) sobre as linhas da matriz ampliada.

Definição 1.2 *Duas matrizes A e B em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ são chamadas de **linha equivalentes** se pudermos obter B aplicando um número finito de operações elementares à matriz A.*

Exemplo 1.18 $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x - 2y = 2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \vdots & 5 \\ -1 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & \vdots & 9 \\ -1 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow -\frac{1}{3}L_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vdots & -3 \\ -1 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow^{L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vdots & -3 \\ -1 & 0 & \vdots & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_2 \leftrightarrow -1L_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vdots & -3 \\ 1 & 0 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -3,\ x = 4,$$

daí temos que a solução do sistema é $(4, -3)$.

Exemplo 1.19 $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \vdots & 7 \\ -1 & 3 & \vdots & 4 \\ 1 & 2 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow^{\substack{L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2}} \begin{pmatrix} 0 & 5 & \vdots & 15 \\ -1 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 5 & \vdots & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_3 \leftrightarrow L_3 + (-1)L_1} \begin{pmatrix} 0 & 5 & \vdots & 15 \\ -1 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

daí temos um absurdo, pois teremos pela última linha que $0 = -1$. Portanto o sistema não possui solução.

Em resumo temos o seguinte esquema que relaciona sistemas lineares e matrizes:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Sistema linear} \arrow[r, "\text{operações elementares}"] \arrow[d] & \text{Sistema equivalente} \arrow[d] \\
\text{matriz ampliada} \arrow[r, "\text{operações elementares}"'] & \text{matriz linha equivalente}
\end{tikzcd}
$$

Definição 1.3 *Dizemos que uma matriz está na sua* ***forma escalonada*** *se ela for nula, ou se ela satisfaz os seguintes itens:*

- *o primeiro elemento não nulo de cada linha é igual a 1;*
- *a coluna onde ocorre o primeiro elemento não nulo de cada linha tem os outros elementos nulos;*
- *todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;*
- *se o primeiro elemento não nulo da linha i acontece na coluna j então o primeiro elemento não nulo da linha $i+1$ aparece na coluna $k > j$.*

$$
\begin{bmatrix}
\cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \square & 0 & \square & \cdots \\
\cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \square & \cdots \\
 & & \ddots & & & & & & \\
\cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{bmatrix}.
$$

Exemplo 1.20 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *está na forma escalonada.*

Exemplo 1.21 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *não estão na forma escalonada.*

Teorema 1.1 *Toda matriz é linha equivalente a uma matriz na forma escalonada.*

Este resultado é importante pois ao reduzirmos a matriz ampliada de um sistema a uma matriz na forma escalonada obtemos um sistema equivalente ao sistema dado que se encontra da maneira mais simples. Este processo chamado **escalonamento de matrizes** quando utilizado em sistemas de equações lineares é chamado de **processo de eliminação de Gauss-Jordan**.

Exemplo 1.22 $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ -x-y+z=2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow^{L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow -1L_1}_{L_2 \leftrightarrow -1L_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow L_1 + (-1)L_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow x = 3,\ y = -5 + z,$$

daí temos que a solução do sistema é $\{(3, -5+z, z) : \ z \in \mathbb{R}\}$ *e portanto o sistema tem infinitas soluções.*

1.2.4 Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes foi apresentada pelo matemático britânico Arthur Cayley (1821-1895) em um trabalho de 1858. Ele notou que essa multiplicação simplificava o estudo de sistemas de equações lineares. E ainda, ela não satisfazia algumas propriedades comuns em multiplicação, como a comutatividade e a lei do cancelamento.

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$ duas matrizes. O **produto** AB de A por B é definido por

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{m\times p}(\mathbb{R}) \\ & (A, B) & \longmapsto & AB = C, \end{array}$$

onde $C = (c_{ik})_{m\times p}$ é dada por

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk},$$

para todos $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k \leq p$. Assim

$$AB = C = (c_{ik})_{m\times p} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

Vejamos como obter o elemento c_{ij} de C.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ & & \vdots & \end{pmatrix}}_{\text{linha } i \text{ da matriz } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \ldots & b_{1j} & \ldots \\ \ldots & b_{2j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & b_{nj} & \ldots \end{pmatrix}}_{\text{coluna } j \text{ da matriz } B} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ij} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.23

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \\ a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} & a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Exemplo 1.24 *Considere as matrizes* $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}_{1\times 4}$ *e* $E = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 2}$, *e observe que:*

- $D \cdot E = \begin{pmatrix} (1\cdot 4) + (2\cdot 0) + (3\cdot 3) + (9\cdot 5) & (1\cdot(-1)) + (2\cdot 1) + (3\cdot 7) + (9\cdot 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0+9+45 & -1+2+21+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 58 \end{pmatrix}$
- *Porém a multiplicação* $E \cdot D$ *não pode ser realizada já que* E *tem duas colunas e* D *uma linha.*

A multiplicação de matrizes satisfaz algumas propriedades que serão listadas a seguir.

- Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e as matrizes identidades I_n e I_m. Então

$$A \cdot I_n = I_m \cdot A = A \quad \text{(elemento neutro ou identidade da multiplicação);}$$

- Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e as matrizes nulas $0_{n\times p}$ e $0_{k\times m}$. Então

$$0_{k\times m} \cdot A = 0_{k\times n}$$

$$A \cdot 0_{n\times p} = 0_{m\times p};$$

- Dadas as matrizes com suas respectivas ordens $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ e $C_{p\times n}$, temos

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{(distributiva à esquerda da multiplicação);}$$

- Dadas as matrizes com suas respectivas ordens $A_{n\times p}$, $B_{m\times n}$ e $C_{m\times n}$, temos

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad \text{(distributiva à direita da multiplicação);}$$

- Dadas as matrizes com suas respectivas ordens $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{p\times k}$, temos

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \text{(associatividade);}$$

Observação 1.1 *O produto de matrizes não satisfaz propriedades comuns em multiplicações, como veremos a seguir. E além disso, podemos utilizar a operação de multiplicação de matrizes para reescrevermos sistemas lineares.*

(1) Em geral, se A e B são matrizes, $AB \neq BA$. Por exemplo, se A é uma matriz de ordem 2×3 e B uma matriz de ordem 3×1, o produto AB está definido, porém o produto BA nem definido pode ser. Logo para que existam os produtos AB e BA, as duas matrizes devem ser quadradas e de mesma ordem. Contudo, isso ainda não é o suficiente para termos AB igual a BA. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que é diferente de

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto a multiplicação de matrizes não é comutativa.

(2) Em geral, para matrizes $AB = 0$ não implica em $A = 0$ ou $B = 0$. Por exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Os sistemas lineares, como (1.2)*, podem ser expressos por uma equação matricial*

$$AX = Y,$$

$$\text{onde } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{m \times 1}.$$

Com a multiplicação de matrizes definida, podemos definir a **potenciação** de matrizes da maneira usual. Dado $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada de ordem n, definimos

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A \quad \text{e} \quad A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \quad \text{vezes}}, \quad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2.$$

Definição 1.4 *Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$, chamamos de **matriz transposta de** A, e denotamos por por A^t, a matriz $B = (b_{ij})$ de ordem $n \times m$, onde $b_{ij} = a_{ji}$, para todos $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.*

Exemplo 1.25

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A^t = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dadas as matrizes A e B e o número real a, é possível mostrar que, existindo as somas e produtos de matrizes abaixo, a transposição de matrizes satisfaz:

- $(A+B)^t = A^t + B^t$;
- $(a \cdot A)^t = a \cdot A^t$;
- $(A \cdot B)^t = B^t A^t$;
- $(A^t)^t = A$.

Definição 1.5 *Uma matriz quadrada A é chamada* ***simétrica*** *se $A^t = A$ e ela é dita* ***antissimétrica*** *se $A^t = -A$.*

Exemplo 1.26 *Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ então $A^t = A$ e portanto, A é simétrica.*

Seja $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ então $B^t = -B$ e portanto, B é antissimétrica.

1.2.5 Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos A de **inversível (ou invertível)** se existe uma matriz B tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Neste caso, dizemos que a matriz B é **inversa** de A.

Exemplo 1.27 *Dado a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, temos que $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é inversa de A.*

Ao contrário, por exemplo, dos números reais, não é verdade que toda matriz quadrada não nula possui uma inversa. Ou seja, existem matrizes não nulas que não são inversíveis. Verifique, por exemplo, que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ não possui inversa.

Proposição 1.1 *Se A é uma matriz quadrada de ordem n que possui uma inversa B, então essa inversa é única.*

Demonstração: De fato, suponha B e C duas matrizes inversas de A. Então temos

$$C = C \cdot I_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

■

Devido a unicidade da inversa de A iremos denotar essa inversa por A^{-1}.

Proposição 1.2 *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n.*

(i) Se A é inversível, então A^{-1} é inversível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem inversíveis, então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

Um grande interesse por trás do estudo das matrizes inversíveis está no fato de que para sistemas lineares em que o número de equações coincide com o número de incógnitas, podemos utilizar um outro método para resolvê-los, que chamaremos de **método da matriz inversa**. Considere o sistema

$$AX = B$$

e suponha que A seja uma matriz inversível. Neste caso, existe a matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ e daí

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B \\ &\Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B \\ &\Leftrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B. \end{aligned}$$

Portanto, se A é inversível, o sistema possui uma única solução dada por

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Como já vimos, o fato de uma matriz ser quadrada não garante que a mesma seja inversível. Logo estamos interessados em métodos para determinar se uma matriz quadrada é ou não inversível e além disso, em maneiras de se determinar essa inversa. Na Seção 1.3 veremos uma maneira de saber se uma matriz é inversível utilizando determinantes. A seguir veremos uma maneira de calcular a matriz inversa, caso ela exista.

Um procedimento prático para obtenção da matriz inversa, quando esta existir, consiste em efetuar operações elementares nas linhas de uma matriz dada até obtermos a matriz identidade. Caso isso seja possível a matriz dada é inversível e para obtermos a inversa basta aplicarmos a mesma sequência de operações elementares nas linhas da matriz identidade.

Em resumo, fazemos a sequência de operações elementares simultaneamente numa matriz A dada e na matriz identidade I de mesma ordem que A. Quando no lugar de A tivermos a matriz identidade, então no lugar de I teremos a matriz inversa de A.

$$[A \;\vdots\; I] \quad \underbrace{\longrightarrow}_{\text{operações elementares}} \quad [I \;\vdots\; A^{-1}]$$

Por exempo, vamos verificar se a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ é inversível. Para isso, faremos simultaneamente operações elementares nas linhas de A e da matriz identidade I_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow^{L_2 \leftrightarrow L_2 + 2\cdot L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow^{L_3 \leftrightarrow L_3 + 3\cdot L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow^{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{9} L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow L_1 - 2\cdot L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow^{L_3 \leftrightarrow L_3 - 12\cdot L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow^{L_3 \leftrightarrow \frac{1}{9} L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow L_1 - 3\cdot L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{array}\right).$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

1.2.6 Exercícios

(1) Mostre que o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes $m \times n$ com entradas reais, com a operação usual de adição e a multiplicação por escalar usual é um espaço vetorial real.

(2) Determine os valores de x, y e z em $\mathbb{R}$ para que as matrizes A e B dadas sejam iguais:

$$A = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ z & x-2y \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix},$$

determine:

(a) $A + B$;

(b) $-2C$;

(c) AC;

(d) CD;

(e) BC;

(f) DA.

(4) Considere as matrizes

$$A = [a_{ij}]_{4\times 5}, \quad \text{com} \quad a_{ij} = i - j;$$

$$B = [b_{ij}]_{5\times 9}, \quad \text{com} \quad b_{ij} = j;$$

$$C = [c_{ij}], \quad \text{com} \quad C = AB.$$

(a) É possível determinar c_{63}? Justifique.

(b) Determine c_{36}.

(5) Dada uma matriz A, dizemos que uma matrix X **comuta** com A se $AX = XA$. Determine todas as matrizes que comutam com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(6) Uma matriz quadrada A será dita **nilpotente** se existir um número natural n tal que $A^n = 0$. E o menor número natural n tal que $A^n = 0$ será chamado de **ordem de nilpotência** de A. Determine todas as matrizes nilpotentes de ordem 2 com ordem de nilpotência 2.

(7) Em $\mathbb{R}^3$, se tivermos um sistema linear com três equações, quais seriam as possibilidades de interpretações geométricas para este sistema e qual seria a consequência na resolução do sistema para cada possibilidade?

(8) (a) Obtenha A^t, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Mostre que $(A+B)^t = A^t + B^t$ e $(kA^t) = kA^t$, onde A e B são matrizes quaisquer de mesma ordem e $k \in \mathbb{R}$.

(c) Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ e B é uma matriz de ordem $n \times p$, prove que $(AB)^t = B^t A^t$.

(d) Mostre que $(A^t)^t = A$ para toda matriz A.

(9) Mostre que se B é uma matriz quadrada, então:

(a) $B + B^t$ e BB^t são simétricas;

(b) $B - B^t$ é antissimétrica.

(10) Mostre que toda matriz quadrada se escreve como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica.

(11) Mostre que uma matriz A é inversível se, e somente se, A^t é inversível. Conclua que as operações de inversão e transposição comutam, isto é, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, quando A é inversível.

(12) Mostre que se A e B são matrizes inversíveis, então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(13) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Obtenha a forma escalonada de A.

(b) A é inversível? Justifique e caso seja inversível, determine A^{-1}.

(14) Determine a matriz inversa de cada uma das matrizes dadas:

(a) $A = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(15) O **traço** de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos da sua diagonal principal e é simbolizado por $tr(A)$. Mostre que, se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

(16) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) e justifique sua escolha utilizando demonstrações ou contra-exemplos.

(a) (   ) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2.$$

(b) (   ) Se A, B e C são matrizes quadradas de mesma ordem e A diferente da matriz nula, vale que

$$AB = AC \Rightarrow B = C.$$

(c) (   ) $tr(A^tA) = tr(AA^t)$.

(d) (   ) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, ambas compostas por inteiros positivos. Se os elementos de A forem todos pares, então os elementos de AB e de BA serão todos pares.

(e) (   ) Se $A^k = 0$ para todo $k \geq 2$, então $A = 0$.

1.3 Determinantes

Apesar de ser comum associarmos determinantes às matrizes, sabe-se que o conceito de determinante surgiu antes do de matrizes. Já em 1693, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) conhecia a definição combinatória moderna de determinantes, a utilizando no estudo de sistemas lineares. Outros matemáticos, como Maclaurin, Cramer, Vandermonde e Laplace deram um grande impulso aos estudos sobre determinantes até século XIX. Entretanto, a partir do século XX os estudos sobre o tema diminuiu bastante, pois percebeu-se que eles não são necessários nas principais demonstrações de álgebra linear e além disso, é bastante trabalhoso, mesmo para computadores, o cálculo de determinantes. Ainda assim, o assunto é visto em disciplinas de álgebra linear por dois principais motivos: o valor histórico e sua praticidade em cálculos que envolvem matrizes pequenas. Sendo assim, nosso objetivo nessa seção é apresentar de maneira mais direta possível o assunto e utilizá-lo no estudo de sistemas lineares.

Chamaremos de *determinante* uma função que associa a cada matriz quadrada A com entradas reais um número real denotado por $detA$ ou $|A|$. Essa função possui diversas propriedades e no nosso contexto destacamos o fato de que $detA = 0$ se, e somente se, a matriz A não for inversível. Isso nos dará um método prático que nos dirá se poderemos ou não usar o método da matriz inversa para solução de sistemas lineares.

Algo que não é tão prático é o cálculo de determinantes para matrizes de ordens maiores. Iremos definir de maneira geral o cálculo de determinantes, porém a praticidade de seu uso está em casos de sistemas lineares de 2 ou 3 variáveis.

Para uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem 1, definiremos o determinante de A por

$$detA = a_{11}.$$

No caso da matriz A ser de ordem 2 ou 3 temos as seguintes fórmulas para $detA$:

(i) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, o determinante de A é o número

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Exemplo 1.28 *Seja a matriz* $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, *daí*

$$detA = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4.$$

(ii) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o determinante de A é o número

$$\begin{aligned} detA &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.29 *Seja a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, *daí*

$$\begin{aligned} detA &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot -4 \cdot 7 + 0 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \cdot 0 - (1 \cdot 1 \cdot 0) - (0 \cdot 5 \cdot 7) - (3 \cdot (-4) \cdot (-3)) \\ &= -28 + 0 + 0 - 0 - 0 - 36 \\ &= -64 \end{aligned}$$

1.3.1 Desenvolvimento de Laplace

Dada uma matriz genérica quadrada A, de ordem n, vejamos como obter o determinante de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para cada par $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definimos a matriz A_{ij} como sendo a submatriz quadrada de A obtida retirando a i-ésima linha e a $j-$ésima coluna. Chamaremos de **cofator** e denotaremos por $\triangle_{ij}$ o número dado por

$$\triangle_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|.$$

O determinante da matriz A será dado por

$$detA = a_{i1}\triangle_{i1} + a_{i2}\triangle_{i2} + \cdots + a_{in}\triangle_{in},$$

que chamamos de **desenvolvimento de Laplace (ou expansão em cofatores)**.

Observação 1.2 *O determinante independe da escolha da linha i para o desenvolvimento. Além disso, o método também é válido para colunas.*

Exemplo 1.30 *Considere a matriz* $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *e vamos utilizar o desenvolvimento de Laplace para calcular* $detC$. *Escolhendo a linha 1 para o desenvolvimento temos:*

$$\begin{aligned}
detC &= c_{11}\triangle_{11} + c_{12}\triangle_{12} + c_{13}\triangle_{13} + c_{14}\triangle_{14} \\
&= c_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot |C_{11}| + c_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot |C_{12}| + c_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot |C_{13}| + c_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot |C_{14}| \\
&= 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&+ 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot [0 + 2 + 2 - (0 + 4 - 6)] + 0 + 2 \cdot [18 + 4 + 0 - (2 - 6 + 0)] + 0 \\
&= 1 \cdot [4 + 2] + 0 + 2 \cdot [22 - (-4)] + 0 \\
&= 1 \cdot 6 + 0 + 2 \cdot 26 + 0 \\
&= 6 + 0 + 52 + 0 \\
&= 58
\end{aligned}$$

1.3.2 Propriedades de determinantes

Apesar do cálculo de determinantes ser algo custoso, algumas propriedades podem facilitar, em alguns casos, este cálculo como veremos a seguir. Algumas das propriedades serão demonstradas e as demais serão deixadas como exercício para o leitor. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

(D1) Se multiplicarmos uma linha de A por uma constante k, então o determinante da nova matriz é igual a $k \cdot detA$, isto é,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{i1} & k \cdot a_{i2} & \cdots & k \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot detA;$$

Demonstração:

Seja B a nova matriz obtida ao multiplicarmos a linha i de A por k. Daí, utilizando o desenvolvimento de Laplace temos

$$\begin{aligned} detB &= ka_{i1}(-1)^2|B_{i1}| + ka_{i2}(-1)^3|B_{i2}| + \cdots + ka_{in}(-1)^{1+n}|B_{in}| \\ &= k(a_{i1}(-1)^2|B_{i1}| + a_{i2}(-1)^3|B_{i2}| + \cdots + a_{in}(-1)^{1+n}|B_{in}|) \end{aligned}$$

Mas observe que as matrizes A e B só diferem pela linha i, logo $B_{ij} = A_{ij}$ para todo $1 \leq j \leq n$. E daí,

$$\begin{aligned} detB &= k(a_{i1}(-1)^2|B_{i1}| + a_{i2}(-1)^3|B_{i2}| + \cdots + a_{in}(-1)^{1+n}|B_{in}|) \\ &= k(a_{i1}(-1)^2|A_{i1}| + a_{i2}(-1)^3|A_{i2}| + \cdots + a_{in}(-1)^{1+n}|A_{in}|) \\ &= k \cdot detA. \end{aligned}$$

■

Observação 1.3 *Se A é uma matriz de ordem $n \times n$ e $B = kA$, com $k \in \mathbb{R}$ então $detB = k^n detA$.*

(D2) Se trocarmos a posição de duas linhas de A, o determinante troca de sinal;

(D3) Se todos os elementos de uma linha ou coluna de A são nulos, então $detA = 0$;

Demonstração: Basta escolhermos a linha (ou coluna) toda nula para usarmos no cálculo do determinante através do desenvolvimento de Laplace. ■

(D4) Se A tiver duas linhas ou duas colunas iguais, seu determinante é nulo;

Demonstração: Seja $A_{n\times n}$ uma matriz com $n \geq 2$.

(i) $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad detA = ab - ab = 0.$$

(ii) Suponha que para $n = k$ a proposição seja verdadeira.

(iii) Seja $B_{(k+1)\times(k+1)} = (b_{ij})$ uma matriz com duas linhas iguais. Vamos calcular o determinante da matriz B usando o desenvolvimento de Laplace utilizando uma linha i tal que entre as linhas restantes ainda existam duas linhas iguais. Daí, temos

$$detB = b_{i1}(-1)^2|B_{i1}| + b_{i2}(-1)^3|B_{i2}| + \cdots + b_{ik+1}(-1)^{1+k+1}|B_{ik+1}|.$$

Agora, note que as matrizes B_{ij}, para todo $1 \leq j \leq k+1$, são matrizes de ordem $k \times k$ com duas linhas iguais, daí segue pela hipótese de indução que $detB_{ij} = 0$ para todo $1 \leq j \leq k+1$. E portanto, $detB = 0$.

■

(D5) Se duas linhas da matriz A forem proporcionais então o determinante de A é nulo.

(D6) O determinante de A não muda se somarmos a uma linha, outra linha multiplicada por uma constante;

Observação 1.4 *Em resumo, temos as seguintes relações entre as operações elementares que podem ser feitas numa matriz e o determinante:*

Operações elementares	***Determinante***
$L_i \leftrightarrow L_j$	*muda de sinal*
$L_i \leftrightarrow kL_i$	*multiplica por k*
$L_i \leftrightarrow L_i + kL_j$	*não muda*

(D7) $det(AB) = detA \cdot detB$.

Observação 1.5 *Não vale, em geral,* $det(A + B) = detA + detB$.

(D8) $detA = detA^t$;

(D9) Se A for uma matriz triangular, então o determinante de A será o produto da sua diagonal principal;

1.3.3 Matriz adjunta

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

a **matriz adjunta** de A, denotada por $adjA$ é a transposta da matriz dos cofatores de A, isto é,

$$adjA = \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \triangle_{12} & \cdots & \triangle_{1n} \\ \triangle_{21} & \triangle_{22} & \cdots & \triangle_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \triangle_{n1} & \triangle_{n2} & \cdots & \triangle_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \triangle_{21} & \cdots & \triangle_{n1} \\ \triangle_{12} & \triangle_{22} & \cdots & \triangle_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \triangle_{1n} & \triangle_{2n} & \cdots & \triangle_{nn} \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.2 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n, então*

$$A \cdot adjA = adjA \cdot A = detA \cdot I_n.$$

Proposição 1.3 *Uma matriz A de ordem n é inversível se, e somente se, $detA \neq 0$. E se A for inversível, então $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$.*

Demonstração: Se A é inversível, existe A^{-1} tal que

$$A \cdot A^{-1} = I_n,$$

logo,

$$det(A \cdot A^{-1}) = detI_n \Rightarrow detA \cdot detA^{-1} = 1,$$

portanto $detA \neq 0$ e $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$.

Reciprocamente, temos pelo teorema anterior que

$$A \cdot adjA = detA \cdot I_n$$

e como $detA \neq 0$, então

$$A \cdot \left(\frac{1}{detA} \cdot adjA \right) = I_n.$$

Como a inversa de uma matriz é única então $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} \cdot adjA$. ∎

1.3.4 Exercícios

(1) Calcule os determinantes das matrizes abaixo:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Seja A uma matriz quadrada de ordem 4 tal que $detA \neq 0$ e $A^3 + 2A^2 = 0$. Calcule $detA$.

(3) Seja $A_{5\times 5}$ uma matriz real e B uma matriz obtida de A através das seguintes operações elementares:

(i) $L_3 \leftrightarrow L_4$

(ii) $L_2 \leftrightarrow -2L_2$

(iii) $L_1 \leftrightarrow L_1 + \frac{1}{4}L_2$

(iv) $L_1 \leftrightarrow L_3$

Sabendo que $detA = 12$, calcule $det(-2B^t)$.

(4) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcule:

(a) $det(A - \lambda I_2)$ e $det(B - \lambda I_3)$;

(b) os valores de λ para que a matriz $A - \lambda I_2$ não seja inversível;

(c) os valores de λ para que a matriz $B - \lambda I_3$ não seja inversível.

(5) Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem 3 tais que $C^{-1} = AB$ e $B = 2A$. Se $detC = 32$, determine o valor absoluto de $detA$.

(6) Dizemos que uma matriz inversível A é **ortogonal** se $A^{-1} = A^t$. Prove que se A é uma matriz ortogonal de ordem n, então $detA = \pm 1$.

(7) Mostre que se $detA = 1$ e todas as entradas de A são números inteiros, então todas as entradas de A^{-1} também são números inteiros.

(8) Mostre que a inversa de uma triangular inferior é triangular inferior e a inversa de uma matriz triangular superior é triangular superior.

(9) O **traço** de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos da sua diagonal principal e é simbolizado por $tr(A)$. Seja A uma matriz quadrada de ordem 2. Mostre que $det(A + I_2) = detA + 1$ se, e somente se, $tr(A) = 0$.

(10) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) e justifique sua escolha utilizando demonstrações ou contra-exemplos.

(a) ( ) Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{n\times m}$, com $m \neq n$, então $det(AB) = det(BA)$;
(b) ( ) $det(A + B) = det(B + A)$;
(c) ( ) $det(kA) = kdet(A)$, onde k é um número real.

1.4 Discussão de sistemas

Para finalizar este capítulo, iremos apresentar algumas definições e classificações sobre sistemas lineares. Em particular, sobre a solução de sistema lineares. O objetivo é reunir tudo que foi visto até aqui e mais alguns resultados adicionais que serão apresentados para encontrarmos soluções para um sistema linear e classificá-lo de acordo com essas soluções. O principal e mais eficiente método de resolução de sistemas lineares é o já visto processo de eliminação de Gauss-Jordan que basicamente utiliza-se do escalonamento de matrizes para obter sistemas equivalentes mais fáceis de serem resolvidos. Além deste método, vimos que quando a matriz do sistema é uma matriz inversível, podemos usar essa inversa para encontrar a solução e mais adiante veremos ainda, que neste caso, a Regra de Cramer nos dá a solução de sistemas a partir de determinantes, sendo assim apresenta-se como um método eficiente, pelo menos para sistemas pequenos, onde o cálculo do determinante é simples.

De acordo com a solução de um sistema linear podemos classificá-lo da seguinte forma:

- **sistema possível determinado:** o sistema possui uma única solução;

- **sistema possível indeterminado:** o sistema possui infinitas soluções;
- **sistema impossível:** o sistema não possui solução.

Note que, se um sistema linear $AX = B$ possui duas soluções distintas, digamos, U e V, então o sistema possui infinitas soluções. De fato, escolha α e β dois números reais tais que $\alpha + \beta = 1$. Note que podemos fazer essa escolha de infinitas maneiras. Daí, como U e V são soluções do sistema, então satisfazem

$$AU = B; \qquad AV = B.$$

Logo,

$$A(\alpha U + \beta V) = \alpha AU + \beta AV = \alpha B + \beta B = (\alpha + \beta)B = B,$$

portanto as infinitas combinações $\alpha U + \beta V$ também serão soluções do sistema.

Definição 1.6 *O sistema de equações lineares $AX = B$ é dito **homogêneo** se $B = 0$, isto é se B é a matriz coluna nula. Se $B \neq 0$, o sistema é dito **não homogêneo**.*

Teorema 1.3 (Regra de Cramer) *Seja $AX = B$ um sistema linear de n equações e n variáveis. Se $detA \neq 0$, então o sistema tem uma única solução dada por $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde*

$$x_j = \frac{detA^{(j)}}{detA}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

onde $A^{(j)}$ é a matriz obtida de A trocando sua j-ésima coluna pela única coluna de B.

Portanto, se $AX = 0$ é um sistema homogêneo e $detA \neq 0$ então o sistema terá como uma única solução $(0, 0, \ldots, 0)$.

1.4.1 Posto

Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$ e B a matriz na forma escalonada linha-equivalente à matriz A. Definimos o **posto** p da matriz A como sendo o número de linhas não nulas da matriz B.

Corolário 1.1 *Uma matriz quadrada de ordem n é inversível se, se somente se, ela tem posto n.*

Teorema 1.4 (Teorema do posto) *Consideremos um sistema linear com m equações e n incógnitas $AX = B$. Sejam p_{AB} o posto da matriz ampliada do sistema e p_A o posto da matriz A dos coeficientes do sistema. Então:*

(i) o sistema é possível se, e somente se, $p_{AB} = p_A$.

(ii) *o sistema é possível e determinado se* $p_{AB} = p_A = n$.

(iii) *o sistema é possível e indeterminado se* $p_{AB} = p_A < n$. *Neste caso,* $n - p_A$ *é o número de incógnitas livres do sistema, ou seja, incógnitas que podem assumir qualquer valor real.*

1.4.2 Exercícios

(1) Resolva cada um dos sistemas abaixo e os classifique quanto a sua solução:

(a) $$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 10 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y - z + w = -4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 3y - 3z = -1 \\ 2x - 9y + z = 5 \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} y + 3z - 2t = 0 \\ 2x + y - 4z + 3t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - t = 0 \\ -4x - 3y + 5z - 4t = 0 \end{cases}$$

(f) $$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

(2) Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que o sistema abaixo tenha soluções não nulas:

$$\begin{cases} -3x + 4y = \lambda x \\ -x + 2y = \lambda y \end{cases}$$

(3) Determine o valor de k para que o sistema abaixo tenha solução (e exiba a solução):

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

(4) Que condições devem ser impostas aos números reais m, n e k para que o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = m \\ 2x + 6y - 11z = n \\ x - 2y + 7z = k \end{cases}$$

tenha solução?

(5) Como devem ser escolhidos os coeficientes reais a, b e c para que o sistema

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + cz = -1 \\ ax + 3y - cz = -3 \end{cases}$$

tenha a solução $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2$?

(6) Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ para que os sistemas abaixo

$$(a) \quad \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases} \qquad (c) \quad \begin{cases} x + kz = 0 \\ y = 0 \\ kx + z = 0 \end{cases}$$

(i) tenham solução única;

(ii) não tenham nenhuma solução;

(iii) tenham mais de uma solução.

Determine a solução do sistema quando esta existir.

(7) Uma nutricionista está elaborando uma refeição que contenha os alimentos A, B e C. Cada grama do alimento A contém 2 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 4 unidades de carboidrato. Cada grama de B contém 3 unidades de proteína, 2 unidades de gordura e 1 unidade de carboidrato. Já a grama do alimento C possui 3 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 2 unidades de carboidrato. Se a refeição deve fornecer exatamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de gordura e 21 unidades de carboidrato, quantos gramas de cada tipo de limento devem ser utilizados?

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS VETORIAIS

2.1 Corpos

Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ será chamado **corpo** se estiver munido de uma operação de adição $(+)$ e uma operação de multiplicação $(\cdot)$

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & (a, b) & \mapsto & a + b \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & (a, b) & \mapsto & a \cdot b \end{array}$$

verificando as seguintes propriedades, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{K}$:

(A1) A adição é associativa, isto é,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

(A2) A adição é comutativa, isto é,

$$a + b = b + a.$$

(A3) A adição possui **elemento neutro**, ou seja, existe $0 \in \mathbb{K}$, tal que dado $a \in \mathbb{K}$, $a + 0 = a$.

(A4) A adição possui **elementos simétricos**, ou seja, para todo $a \in \mathbb{K}$, existe $-a \in \mathbb{K}$, tal que

$$a + (-a) = 0.$$

(M1) A multiplicação é associativa, isto é,

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(M2) A multiplicação é comutativa, isto é,

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

(M3) A multiplicação possui **elemento neutro**, ou seja, existe $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tal que dado $a \in \mathbb{K}$, $a \cdot 1 = a$.

(M4) A multiplicação possui **elementos inversos**, ou seja, para todo $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$, tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

(AM) A multiplicação é distributiva em relação a adição, isto é

$$a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

Exemplo 2.1 *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um corpo.*

Exemplo 2.2 *O conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}; \quad i^2 = -1\}$ dos números complexos é um corpo.*

Exemplo 2.3 *O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros não é um corpo.*

Exemplo 2.4 *O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é um corpo.*

Exemplo 2.5 *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um corpo.*

Exemplo 2.6 *Seja $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ um conjunto onde as operações de adição e multiplicação são das pelas tábuas*

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabela 2.1: Adição em $\mathbb{F}_2$

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 2.2: Multiplicação em $\mathbb{F}_2$

*$\mathbb{F}_2$ com essas operações é um corpo, chamado **corpo de Galois** e é o corpo com o menor número de elementos que existe.*

2.2 Espaços Vetoriais

Um conjunto não vazio V será dito um **espaço vetorial** sobre um corpo $\mathbb{K}$ (ou um $\mathbb{K}$-**espaço vetorial**) se estiverem definidas uma adição em V e uma ação de $\mathbb{K}$ em V chamada **multiplicação por escalar**

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \to & V \\ & (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times V & \to & V \\ & (a, v) & \mapsto & a \cdot v \end{array}$$

satisfazendo:

(A1) A adição é associativa, isto é,

$$(u + v) + w = u + (v + w), \quad \forall\, u, v, w \in V.$$

(A2) A adição é comutativa, isto é,

$$u + v = v + u, \quad \forall\, u, v \in V.$$

(A3) A adição possui **elemento neutro**, que iremos denotar por 0, ou seja, existe $0 \in V$, tal que dado $u \in V$, $u + 0 = u$.

(A4) A adição possui **elementos simétricos**, ou seja, para todo $u \in V$, existe $-u \in V$, tal que

$$u + (-u) = 0.$$

(ME1) $a(u + v) = au + av, \quad \forall\, a \in \mathbb{K},\ u, v \in V$.

(ME2) $(a + b)u = au + bu, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{K},\ u \in V.$

(ME3) $(a \cdot b)u = a(bv), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{K},\ u \in V.$

(ME4) $1 \cdot u = u, \quad \forall\, u \in V$.

Os elementos de V serão chamados **vetores** e os elementos de $\mathbb{K}$ de **escalares**. O elemento $0 \in V$ será chamado de **vetor nulo** e o elemento $-v \in V$ de **vetor oposto** de v.

Proposição 2.1 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Dados $a \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ tem-se*

$$a = 0 \quad ou \quad v = 0 \Leftrightarrow av = 0.$$

Demonstração: Se $a = 0$, vamos mostrar que $0 \cdot v = 0$ é o vetor nulo. De fato, observe que

$$v + 0 \cdot v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = 1 \cdot v = v,$$

daí

$$v + 0 \cdot v = v \Rightarrow v + 0 \cdot v + (-v) = v + (-v) \Rightarrow 0 \cdot v = 0.$$

Se $v = 0$ é o vetor nulo, provemos que $a \cdot 0 = 0$. De fato,

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (-a \cdot 0) \Rightarrow a \cdot 0 = 0.$$

Reciprocamente, se $a \cdot v = 0$, suponha $a \neq 0$, daí teríamos

$$v = 1 \cdot v = (a \cdot a^{-1}) \cdot v = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

■

Proposição 2.2 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.*

(i) o vetor nulo é único.

(ii) dado $v \in V$, $-v$ é o único vetor simétrico de v.

Demonstração:

(i) Suponha que 0 e $0'$ sejam vetores nulos de V e seja $v \in V$, daí

$$v + 0 = v = v + 0' \Rightarrow v + 0 = v + 0',$$

Daí, somando o simétrico de v nos dois lados da iguadade acima temos

$$v + 0 + (-v) = v + 0' + (-v) \Rightarrow 0 = 0'.$$

(ii) Suponha que exista v' tal que $v + v' = 0$, daí

$$v' = v' + 0 = v' + (v - v) = (v' + v) - v = 0 - v = -v.$$

■

Exemplo 2.7 *Se $\mathbb{K}$ é um corpo, então $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.*

Exemplo 2.8 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e defina $\mathbb{K}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$. Considere a adição em $\mathbb{K}^n$ definida da seguinte forma:*

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$

e para $\alpha \in \mathbb{K}$, definimos a multiplicação por escalar como:

$$\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

Com essas definições, $\mathbb{K}^n$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Exemplo 2.9 *O conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$ é um $\mathbb{F}_2$-espaço vetorial.*

Exemplo 2.10 *Seja $\mathbb{K}$ um copro e considere o sistema linear homogêneo*

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

com $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Uma solução para o sistema (2.1) é uma n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ que satisfaz todas as equações de (2.1). O conjunto solução de (2.1) é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, isto é, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

então o conjunto solução de (2.1) é dado por $S = \{X : \quad AX = 0\}$. Note que, se $X_1, X_2 \in S$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então $X_1 + X_2 \in S$, $\alpha X_1 \in S$ e $-X_1 \in S$, pois

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0,$$

$$A(\alpha X_1) = \alpha(AX_1) = \alpha \cdot 0 = 0,$$
$$A(-X_1) = -(AX_1) = -0 = 0.$$

2.2.1 Exercícios

(1) Mostre que se $\mathbb{K}$ é um corpo então para todo $a \in \mathbb{K}$ tem-se $a \cdot 0 = 0$.

(2) Mostre que se $\mathbb{K}$ é um corpo, o elemento neutro da adição em $\mathbb{K}$ é único.

(3) Mostre que se $\mathbb{K}$ é um corpo, os elementos simétricos aditivo e multiplicativo (se existir) são únicos para cada elemento do corpo.

(4) Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo, com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais.

(5) Mostre que o conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ não é um corpo, com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais.

(6) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $u, v, w \in V$. Mostre que se $u + v = u + w$ então $v = w$.

(7) Mostre que se $\mathbb{K}$ é um corpo, então $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as mesmas operações de soma e produto definidas em $\mathbb{K}$.

(8) Descreva o vetor nulo de cada um dos espaços vetoriais abaixo (nos quais são consideradas as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar):

(a) $\mathbb{R}^2$
(b) $\mathbb{R}^3$
(c) $\mathbb{R}^n$
(d) $\mathbb{C}^n$
(e) $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$
(f) $P(\mathbb{R})$ (polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$)
(g) $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ (funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$)

(9) Em cada item abaixo são definidas em $\mathbb{R}^2$ operações de adição de vetores e multiplicação por escalar com as quais $\mathbb{R}^2$ não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Mostre (através de contra exemplos), em cada caso, quais as propriedades de espaços vetoriais não são atendidas pelas operações dadas:

(a)
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 2y_1 + 2y_2)$$
$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

(b)
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha y_1, \alpha x_1)$$

(c)
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\alpha(x_1, y_1) = (0, \alpha y_1)$$

(10) Verifique se é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais tais que $x > 0$ e $y > 0$, com as operações definidas por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(11) Seja $V = \{(1, x, 2) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ munido das operações

$$(1, x_1, 2) + (1, x_2, 2) = (1, x_1 + x_2, 2)$$

$$\alpha(1, x, 2) = (1, \alpha x, 2), \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mostre que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e obtenha o vetor nulo de V.

(12) Verifique quais conjuntos de vetores abaixo são espaços vetoriais reais. Para aqueles que não forem, citar as propriedades que não se verificam.

  (a) $A = \{(x, 2x, 3x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais

  (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 5x\}$ com as operações usuais

(13) Sejam U e W dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Considere o produto cartesiano $V = U \times W$ desses dois conjuntos. Defina as seguintes operações em V:

$$(u_1, w_1) + (u_2, w_2) = (u_1 + u_2, w_1 + w_2) \quad \text{e} \quad a(u_1, w_1) = (au_1, aw_1),$$

onde $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ e $a \in \mathbb{K}$. Mostre que V com as operações de adição e de multiplicação por escalar, acima definidas, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Este espaço veotiral é chamado de **espaço produto** de U por W.

2.3 Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subconjunto não vazio de V. Dizemos que W é um **subespaço vetorial** de V, ou simplesmente **subespaço** de V, se W, com as operações de adição de V e a multiplicação de escalares de $\mathbb{K}$ por vetores de V, é um espaço vetorial.

Basicamente, da definição acima temos que, para verificar se W, um subconjunto não vazio de V, é um subespaço vetorial, precisamos verificar se as operações de V estão definidas em W e se as oito propriedades de espaço vetorial são satisfeitas pelos elementos de W. Porém, como W é uma parte de V, não precisaremos testar algumas propriedades, como por exemplo, a associatividade e a comutatividade da adição, já que essas propriedades são satisfeitas por todos os elementos de V, em particular, pelos de W. Pelo mesmo motivo, outras propriedades não precisarão ser verificadas. Em resumo, temos o resultado seguinte que nos dá uma maneira mais prática de verificar se W é ou não subespaço de V. Basicamente, precisamos verificar se as operações estão definidas em W.

Proposição 2.3 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Então, W é um subespaço de V se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) se $u, v \in W$, então $u + v \in W$;

(ii) se $a \in \mathbb{K}$ e $u \in W$, então $au \in W$.

A proposição acima pode ser escrita da seguinte forma:

Corolário 2.1 *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Temos que W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, $u + av \in W$, para todo $a \in \mathbb{K}$ e para todos $u, v \in W$.*

Exemplo 2.11 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Os conjuntos $\{0\}$ e V são subespaços de V. São os chamados* ***subespaços triviais***. *O subespaço $\{0\}$ também é chamado de* ***espaço nulo***.

Exemplo 2.12 $W = \{(x, 3x) : \ x \in \mathbb{R}\}$ *é um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. De fato, observe que W é diferente de vazio, já que*

$$(0,0) = (0, 3 \cdot 0) \in W.$$

Além disso, sejam $u = (x_1, 3x_1), v = (x_2, 3x_2) \in W$ e $a \in \mathbb{K}$, daí

$$u + v = (x_1 + x_2, 3x_1 + 3x_2) = (x_1 + x_2, 3(x_1 + x_2)) \in W,$$

$$au = (ax_1, a \cdot 3x_1) = (ax_1, 3(ax_1)) \in W.$$

Exemplo 2.13 $W = \{(x, x^2) : \ x \in \mathbb{R}\}$ *não é um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. De fato, apesar de $W \neq \emptyset$, já que $(0,0) \in W$, observe que, $u = (2,4), v = (3,9) \in W$, mas*

$$u + v = (5, 13) \notin W.$$

Exemplo 2.14 $W = \{(x, 3x+1) : \ x \in \mathbb{R}\}$ *não é um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. De fato, note que o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$ não pertence a W, já que se $x = 0$ então $3x + 1 = 1$.*

Exemplo 2.15 $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \ A^t = A\}$ *é um subespaço do espaço vetorial real $M_2(\mathbb{R})$. Inicialmente vamos determinar uma caracterização dos elementos de W. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, daí $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Logo, se $A \in W$ então teremos $b = c$. Portanto, o conjunto W pode ser reescrito como*

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Agora note que a matriz nula pertence a W, basta tomarmos $a = b = c = 0$. E dados

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} \in W \quad e \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

temos

$$A + B = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ b+e & c+f \end{pmatrix} \in W,$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha c \end{pmatrix} \in W.$$

Portanto, W é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.16 *$\mathbb{R}^2$ não é subespaço de $\mathbb{R}^3$, pois $\mathbb{R}^2$ não está contido em $\mathbb{R}^3$.*

Exemplo 2.17 *Sejam $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Defina*

$$W = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{R}) : \ \ AX = 0 \right\}.$$

W é um subespaço do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $M_{2\times 1}(\mathbb{R})$. De fato, observe que W é diferente de vazio, já que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. Além disso, sejam $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, daí

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 \in W,$$

$$A(\alpha X_1) = \alpha(AX_1) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha X_1 \in W.$$

Exemplo 2.18 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e para cada $a \in \mathbb{K}$, defina o subconjunto*

$$W_a = \{a \cdot v : \ v \in V\}.$$

W_a é um subespaço de V. De fato, observe que $W_a \neq \emptyset$, pois $0 = a \cdot 0 \in W_a$. Além disso, sejam $u_1 = av_1, u_2 = av_2 \in W_a$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$u_1 + u_2 = av_1 + av_2 = a\underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V} \in W_a,$$

$$\alpha \cdot u_1 = \alpha(av_1) = a\underbrace{(\alpha v_1)}_{\in V} \in W_a.$$

2.3.1 Operações com subespaços

Antes de ter definidas operações e de satisfazer uma série de propriedades, um espaço vetorial é um conjunto. Logo, é natural questionarmos se as operações que fazemos com conjuntos ainda preservam a estrutura de espaço vetorial. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e U e W subespaços de V. Relembremos as definições de união e intersecção de conjuntos:

$$U \cup W = \{v : \ v \in U \quad \textbf{ou} \quad v \in W\} \qquad (\text{união de} \quad U \quad \text{e} \quad W)$$
$$U \cap W = \{v : \ v \in U \quad \textbf{e} \quad v \in W\} \qquad (\text{intersecção de} \quad U \quad \text{e} \quad W)$$

A união de subespaços, não é necessariamente um espaço vetorial. Por exemplo, considere U e W os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ dados por

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - y = 0\}.$$

O conjunto $U \cup W$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$. De fato,

$$(1,-1) \in U \subset (U \cup W) \quad \text{e} \quad (1,1) \in W \subset (U \cup W),$$

mas

$$(1,-1)+(1,1)=(2,0) \notin (U \cup W).$$

Proposição 2.4 *A intersecção de dois subespaços de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um subespaço de V.*

Demonstração: De fato, sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. Note que, $U \cap W \neq \emptyset$, pois $0 \in U$ e $0 \in W$, já que ambos são subespaços de V. Além disso, sejam $u, v \in U \cap W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \quad \text{e} \quad u, v \in W.$$

Daí, como U e W são subespaços temos

$$u+v \in U \quad \text{e} \quad u+v \in W \Rightarrow u+v \in U \cap W.$$

Novamente, do fato de U e W serem subespaços vetoriais, temos que $\alpha u \in U$ e $\alpha u \in W$, assim $\alpha u \in U \cap W$ e portanto, segue o resultado. ■

Exemplo 2.19 *Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^3$:*

$$U=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x-y+2z=0\},$$

$$V=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+2y+z=0\}.$$

Vamos determinar o subespaço $U \cap V$.

$$\begin{aligned} U \cap V &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y,z) \in U \quad e \quad (x,y,z) \in V\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x-y+2z=0 \quad e \quad x+2y+z=0\} \end{aligned}$$

Assim, estamos interessados na solução do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos o conjunto solução $S=\left(-\frac{5z}{7}, -\frac{z}{7}, z\right)$. Portanto

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x=-\left(\frac{5}{7}\right)z, \ y=-\left(\frac{1}{7}\right)z, \ z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\left(-\frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, 1\right)z : \ z \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.20 *Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{C}$-espaço vetorial $M_2(\mathbb{C})$:*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{C} \right\},$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Daí, o subespaço $U \cap V$ é dado por

$$\begin{aligned} U \cap V &= \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \ A \in U \quad e \quad A \in V\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{C} \right\}, \end{aligned}$$

Sejam U e W subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Definimos a **soma** de U e W, denotada por $U + W$ como sendo o conjunto

$$U + W = \{u + w : \ u \in U \quad \text{e} \quad w \in W\}.$$

Proposição 2.5 *A soma de dois subespaços U e W de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é um subespaço. Este é o menor subespaço de V que contém U e W, no sentido que se um subespaço L de V é tal que $U \subset L$ e $W \subset L$, então $U + W \subset L$.*

Definição 2.1 *Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. O espaço vetorial V é dito* ***soma direta*** *de U e W, e é representado por $V = U \oplus W$, se $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.*

Teorema 2.1 *Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. Temos que $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo vetor $v \in V$ se escreve de modo único como $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$.*

Demonstração: Considere $V = U \oplus W$. E seja $v \in V$, daí $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$. Suponha agora que existam $u' \in U$ e $w' \in W$ tais que $v = u' + w'$. Daí temos

$$u + w = u' + w' \Rightarrow u - u' = -(w - w').$$

Por um lado, temos que $u - u' \in U$ e por outro $-(w - w') \in W$, logo temos

$$u - u' = -(w - w') \in U \cap W = \{0\}.$$

Portanto $u = u'$ e $w = w'$, como queríamos mostrar.

Reciprocamente, suponha que cada vetor $v \in V$ se escreve de modo único como a soma de um vetor de U com um vetor de W. Neste caso, temos $V = U + W$. Se $U \cap W \neq \{0\}$, existiria um vetor não nulo $v \in U \cap W$. Como $v \in W$ e W é um subespaço, $-v \in W$ e daí

$$0 = v + (-v),$$

com $v \in U$ e $-v \in W$. Mas

$$0 = 0 + 0,$$

com $0 \in U$ e $0 \in W$, isto é, teríamos duas maneiras distintas de escrever um mesmo vetor de V, contrariando a hipótese. Portanto, $U \cap W = \{0\}$ e segue que $V = U \oplus W$. ■

Exemplo 2.21 *Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{C}$-espaço vetorial $M_2(\mathbb{C})$:*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{C} \right\},$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Daí, o subespaço $U + V$ é dado por

$$\begin{aligned} U + V &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : \ a, b, c, t, x \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a + t & b \\ c & x \end{pmatrix} : \ a, b, c, t, x \in \mathbb{C} \right\} = M_2(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Mas vimos no Exemplo 2.20 que

$$U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{C} \right\} \neq \{0\}.$$

Portanto, a soma $M_2(\mathbb{C}) = U + V$ não é direta.

Exemplo 2.22 *Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^3$:*

$$U = \{(x, y, 0) : \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$V = \{(0, 0, z) : \ z \in \mathbb{R}\}.$$

Note que,

$$U + V = \{(x, y, z) : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

e que

$$U \cap V = \{(0, 0, 0)\}.$$

Portanto, $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Exemplo 2.23 *Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^3$:*

$$U = \{(x, y, 0) : \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$V = \{(z, z, z) : \ z \in \mathbb{R}\}.$$

Note que,

$$U + V = \{(x, y, 0) + (z, z, z) : \ x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(x + z, y + z, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3.$$

e que

$$U \cap V = \{(0, 0, 0)\}.$$

Portanto, $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

2.3.2 Subespaços gerados

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Uma **combinação linear** de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é um vetor da forma

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

onde $a_i \in \mathbb{K}$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 2.24 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. *Daí um vetor v é combinação linear dos elementos de S se existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que*

$$v = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) = (\alpha, 0, 0) + (0, \beta, 0) + (0, 0, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Agora note que, dado qualquer vetor $w = (x, y, z) \in V$, temos que w é combinação linear dos elementos de S, já que

$$w = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Portanto,

$$V = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 2.25 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $S = \{u = (1, -1, 0), v = (0, 3, 0)\}$. *Daí um vetor w é combinação linear dos elementos de S se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$w = \alpha u + \beta v = (\alpha, -\alpha, 0) + (0, 3\beta, 0) = (\alpha, 3\beta - \alpha, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

Logo o conjunto das combinações lineares dos elementos de S é

$$W = \{\alpha u + \beta v : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 3\beta - \alpha, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Note que, $(0, 0, 1) \notin W$, *logo* $W \subset V$, *mas* $W \neq V$.

O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de $S \subset V$ é denotado por $[S]$ ou $\langle S \rangle$.

Exemplo 2.26 *Sejam* $V = M_2(\mathbb{R})$ *e* $S = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. *Um elemento* C *de* V *será combinação linear dos elementos de* S *se existem* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$C = \alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\langle S \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proposição 2.6 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* $S \subset V$. *Então* $\langle S \rangle$ *é um subespaço vetorial de* V.

Demonstração: Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. É claro que $\langle S \rangle \neq \emptyset$, já que

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \in \langle S \rangle.$$

Além disso, sejam $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, $w = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n \in \langle S \rangle$ e $k \in \mathbb{K}$, daí

$$u + v = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_n + b_n)v_n \in \langle S \rangle,$$
$$ku = (ka_1)v_1 + (ka_2)v_2 + \cdots + (ka_n)v_n \in \langle S \rangle.$$

■

Definição 2.2 *O subespaço* $\langle S \rangle$ *é denominado o* ***espaço gerado*** *por* S.

2.3.3 Exercícios

(1) Considere os espaços vetoriais V dados abaixo munidos das operações usuais de adição de vetores e multiplicação por escalar. Para cada caso abaixo, verifique se W é subespaço vetorial de V.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\quad W = \{(x, x^3) : \ x \in \mathbb{R}\}$

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $\quad W = \{(3y, y) : \ y \in \mathbb{R}\}$

(c) $V = \mathbb{R}^2$, $\quad W = \{(x, 3x) : \ x \in \mathbb{R}\}$

(d) $V = \mathbb{R}^2$, $\quad W = \{(x, 2x - 1) : \ x \in \mathbb{R}\}$

(e) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad W = \mathbb{R}^2$

(f) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = 3z - x\}$

(g) $V=\mathbb{R}^3$, $W=\{(3a-b,2a+b,a-2b):\ a,b\in\mathbb{R}\}$

(h) $V=\mathbb{R}^3$, W é o conjuto dos vetores do $\mathbb{R}^3$ com pelo menos uma coordenada maior ou igual a 0

(i) $V=\mathbb{R}^4$, $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4:\ 2x+y-w=0 \quad \text{e} \quad z=0\}$

(j) $V=\mathbb{C}^4$, W é o conjunto dos vetores do $\mathbb{C}^4$ que têm duas coordenadas iguais

(k) $V=\mathbb{R}^3$, $W=\{(x,y,x,z):\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$

(l) $V=\mathbb{R}^5$, W é o conjunto dos vetores do $\mathbb{R}^5$ com duas ou mais coordenadas nulas

(m) $V=\mathbb{C}^3$, $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3:\ x\cdot y=0\}$

(n) $V=\mathbb{R}^n$, $W=\{(x,,2x,3x,\ldots,nx)\in\mathbb{R}^n:\ x\in\mathbb{R}\}$

(o) $V=M_2(\mathbb{C})$, $W=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}:\ a,b\in\mathbb{C}\right\}$

(p) $V=M_3(\mathbb{R})$, W é o conjunto das matrizes triangulares superiores

(q) $V=M_{2\times 3}(\mathbb{C})$, W é o conjunto das matrizes 2×3 sobre $\mathbb{C}$ que têm alguma coluna formada por elementos iguais

(r) $V=M_2(\mathbb{C})$, $W=\{A\in V:\ A^t=-A\}$ (matrizes antissimétricas)

(s) $V=M_4(\mathbb{R})$, $W=\{A\in V:\ detA=0\}$

(t) $V=M_2(\mathbb{R})$, $W=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}:\ a\in\mathbb{R}\right\}$

(2) Considere $\mathbb{C}^2=\{(x,y):\ x,y\in\mathbb{C}\}$ que, com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar é espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Temos que $\mathbb{R}^2=\{(x,y):\ x,y\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}^2$. $\mathbb{R}^2$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^2$? Justifique.

(3) Sejam $W_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ x+y=0 \quad \text{e} \quad z-t=0\}$ e $W_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ x-y-z+t=0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine $W_1\cap W_2$.

(4) Sejam $W_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ 2x+y-t=0 \quad \text{e} \quad z=0\}$ e $W_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ x+y=0 \quad \text{e} \quad z-t=0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine $W_1\cap W_2$.

(5) Dados $u=(1,2)$, e $v=(-1,2)$, sejam W_1 e W_2 respectivamente as retas que passam pela origem de $\mathbb{R}^2$ e contêm u e v. Mostre que $\mathbb{R}^2=W_1\oplus W_2$.

(6) Sejam $W_1=\left\{\begin{pmatrix} a & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\ a\in\mathbb{R}\right\}$, $W_2=\left\{\begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}:\ b\in\mathbb{R}\right\}\subset M_2(\mathbb{R})$. Obtenha W_1+W_2 e verifique se esta soma é direta.

(7) Verifique se é verdadeiro ou falso:

(a) $(1,-1,2) \in \langle (1,2,3),(3,2,1) \rangle$

(b) $\langle (-5,3,2),(3,-1,3) \rangle = \mathbb{R}^3$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$ é combinação linear de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

(8) Descreva o subespaço $W \subset M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. O vetor $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

(9) Sejam U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,0,0)$ e W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

(10) Mostre que os polinômios $1-x^3, (1-x)^2, 1-x$ e 1 geram o espaço $P_3(\mathbb{R})$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a 3.

(11) Para cada subespaço obtido no exercício 1, obtenha um conjunto de vetores que gera o subespaço.

(12) Sejam U_1, U_2, W_1, W_2 subespaços de um espaço vetorial V de modo que $V = U_1 \oplus W_1$ e $V = U_2 \oplus W_2$. Se $U_1 \subset U_2$ e $W_1 \subset W_2$, prove que $U_1 = U_2$ e $W_1 = W_2$.

(13) Considere o conjunto $S = \{(-1,3,1),(1,-2,4)\}$ e determine:

(a) o espaço gerado por S;

(b) o valor de $k \in \mathbb{R}$ para que $v = (5,k,11)$ pertença ao espaço gerado por S.

(14) Encontre um conjunto de geradores para cada espaço abaixo:

(a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x - 2y + 3z = 0\}$

(b) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \; x - y = 0 \quad \text{e} \quad x + t = 0\}$

(c) $V = \left\{ p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) : \; a - \dfrac{b}{2} = c \right\}$

(d) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \; a + c = d \quad \text{e} \quad b = 0 \right\}$

(15) Quais dos seguintes vetores

(a) $(0,2,2,2)$, (b) $(1,4,5,2)$, (c) $(0,0,0,0)$, (d) $(0,3,1,5)$

são combinações lineares de $u = (0,0,2,-2)$ e $v = (0,1,3,-1)$?

(16) Expresse os seguintes polinômios

(a) $2+5x$, (b) $-x+2x^2$, (c) $3+3x+5x^2$
como combinação linear de

$$p_1(x) = 2+x+4x^2, \qquad p_2(x) = 1-x+3x^2, \qquad p_3(x) = 3+2x+5x^2.$$

2.4 Bases e dimensão

Vimos no fim da seção anterior, que um conjunto S de vetores gera um dado espaço vetorial V se cada vetor de V pode ser escrito como um combinação linear dos vetores desse conjunto S. Se S é um dado conjunto gerador de um espaço vetorial V, pode ser que tenhamos mais de uma maneira de expressar um vetor v de V como combinação linear dos elementos de S. Veremos, nessa seção, condições para que cada vetor de V possa ser expresso de maneira única como combinação linear dos elementos de um conjunto gerador.

2.4.1 Dependência e independência linear

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Dizemos que S é um conjunto **linearmente independente** (LI) sempre que a igualdade

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$$

só for possível se

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Do contrário dizemos que S é **linearmente dependente** (LD).

Exemplo 2.27 *Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{v_1 = (1,2,0), v_2 = (0,1,1)\}$. Vejamos se S é LI ou LD. Para isso, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$av_1 + bv_2 = 0 \Rightarrow a(1,2,0) + b(0,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow (a, 2a+b, b) = (0,0,0).$$

A última igualdade implica que

$$a = 0, \quad 2a+b = 0, \quad b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Portanto, S é LI.

Exemplo 2.28 *Sejam* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(1,0),(0,1),(1,2)\}$*. Vamos verificar se* S *é LI ou LD. Sejam* $a,b,c \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$a(1,0) + b(0,1) + c(1,2) = (0,0) \Rightarrow (a+c, b+2c) = (0,0).$$

Daí temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + 2c = 0, \end{cases}$$

cuja solução é $\{(-c,-2c,c) : c \in \mathbb{R}\}$*, ou seja, podemos escolher* $c \neq 0$ *e portanto o conjunto* S *é LD.*

Exemplo 2.29 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $S = \{(1,2,0),(0,1,1),(-2,3,1)\}$*. Vamos verificar se* S *é LI ou LD. Sejam* $a,b,c \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$a(1,2,0) + b(0,1,1) + c(-2,3,1) = (0,0,0) \Rightarrow (a-2c, 2a+b+3c, b+c) = (0,0,0).$$

Daí temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a - 2c = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \\ b + c = 0, \end{cases}$$

cuja solução é $\{(0,0,0)\}$*, portanto o conjunto* S *é LI.*

Exemplo 2.30 *O conjunto* $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ *é LI.*

Pelo exemplo anterior, temos que $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto LI. Além disso, como vimos no Exemplo 2.24, $\mathbb{R}^3 = \langle S \rangle$. É possível mostrar que o conjunto S do Exemplo 2.29 além de ser LI, também gera todo o $\mathbb{R}^3$. Mais adiante veremos que conjuntos com essas propriedades, serem LI e gerarem todo o espaço, são fundamentais no estudo dos espaços vetoriais.

Exemplo 2.31 *Sejam* $V = \mathbb{R}^4$ *e* $S = \{(1,1,0,0),(2,3,-1,0),(0,0,0,1)\}$*. Vamos verificar se* S *é um conjunto LI ou LD e também se* $\mathbb{R}^4 = \langle S \rangle$*.*
Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$a(1,1,0,0) + b(2,3,-1,0) + c(0,0,0,1) = (0,0,0,0),$$

daí temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + 3b = 0 \\ -b = 0 \\ c = 0, \end{cases}$$

cuja solução é $\{(0,0,0,0)\}$. *Portanto o conjunto* S *é LI. Para verificar se* $\mathbb{R}^4$ *coincide com o subespaço gerado por* S, *note que,* $\langle S\rangle \subset \mathbb{R}^4$, *resta verificar a inclusão contrária. Seja* $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ *e suponha que este vetor seja combinação linear dos elementos de* S, *isto é, existem* $a,b,c \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$(x,y,z,w) = a(1,1,0,0) + b(2,3,-1,0) + c(0,0,0,1),$$

daí temos o seguinte sistema nas variáveis a,b *e* c:

$$\begin{cases} a+2b = x \\ a+3b = y \\ -b = z \\ c = w, \end{cases}$$

Obtendo sistemas equivalentes ao dado, temos

$$\begin{cases} a+2b = x \\ a+3b = y \\ -b = z \\ c = w \end{cases} \rightarrow_{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1} \begin{cases} a+2b = x \\ b = y-x \\ -b = z \\ c = w \end{cases} \rightarrow_{L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3} \begin{cases} a+2b = x \\ 0 = y-x+z \\ -b = z \\ c = w \end{cases}$$

Note que, dá segunda linha obtemos a restrição $y - x + z = 0$ *ao vetor genérico de* $\mathbb{R}^4$ *do início do exemplo. Logo, nem todo vetor de* $\mathbb{R}^4$ *pode ser escrito como combinação linear dos elementos do conjunto* S *e portanto* S *não gera todo o* $\mathbb{R}^4$.

Exemplo 2.32 *Sejam* $V = P_3(\mathbb{R})$ *o espaço vetorial dos polinômios de grau até 3 em uma variável real e* $S = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\} \subset V$. *Vamos verificar se* S *é LI ou LD e ainda, se* $V = \langle S\rangle$. *Sejam* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$a(1) + b(1+x) + c(1+x+x^2) + d(1+x+x^2+x^3) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3.$$

Daí temos,

$$(a+b+c+d) + (b+c+d)x + (c+d)x^2 + dx^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

e, portanto

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ b+c+d = 0 \\ c+d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = d = 0.$$

Logo, S *é LI. Além disso, seja* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in V$. *Vejamos se existem* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$p(x) = a(1) + b(1+x) + c(1+x+x^2) + d(1+x+x^2+x^3),$$

isto é, veremos se existe solução para o sistema abaixo

$$\left\{\begin{array}{r} a+b+c+d=a_0 \\ b+c+d=a_1 \\ c+d=a_2 \\ d=a_3 \end{array}\right. \Rightarrow d=a_3, c=a_2-a_3, b=a_1-a_2, a=a_0-a_1,$$

ou seja,

$$p(x)=(a_0-a_1)\cdot 1+(a_1-a_2)\cdot(1+x)+(a_2-a_3)\cdot(1+x+x^2)+a_3\cdot(1+x+x^2+x^3).$$

Então $\langle S\rangle = V$.

Exemplo 2.33 *Sejam* $V=\mathbb{R}^2$ *e* $S=\{(1,0),(0,1),(1,2)\}$. *Note que* S *é LD, pois o vetor* $(1,2)$ *pode ser escrito como combinação linear dos demais vetores de* S*:*

$$(1,2)=1\cdot(1,0)+2\cdot(0,1)$$

e daí, teríamos a seguinte combinação linear dos três vetores resultando no vetor nulo

$$1\cdot(1,0)+2\cdot(0,1)+-1\cdot(1,2)=(0,0).$$

Mas $\langle S\rangle = V$. *De fato, dado* $(x,y)\in V$, *note que*

$$(x,y)=(x-c)\cdot(1,0)+(y-2c)\cdot(0,1)+c\cdot(1,2),$$

para qualquer $c\in\mathbb{R}$.

Exemplo 2.34 *Sejam* $V=\mathbb{R}^3$ *e* $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+2y-z=0\}$. W *é um subespaço de* V. *Vamos determinar um subconjunto* $S\subset V$ *tal que* $\langle S\rangle = W$.
Dado $(x,y,z)\in W$, *temos pela condição definidora de* W *que*

$$x+2y-z=0 \Leftrightarrow z=x+2y.$$

Então, podemos reescrever W *como*

$$W=\{(x,y,x+2y):\ x,y\in\mathbb{R}\}.$$

E daí, temos

$$(x,y,x+2y)=(x,0,x)+(0,y,2y)=x\cdot(1,0,1)+y\cdot(0,1,2).$$

Portanto, podemos escolher $S=\{(1,0,1),(0,1,2)\}$.

2.4.2 Bases

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto $S \subset V$ é chamado de base de V se:

(i) S é LI;

(ii) $V = \langle S \rangle$.

Exemplo 2.35 *$S = \{(1,0),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial e essa base é chamada de **base canônînca** do $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 2.36 *$S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.*

Exemplo 2.37 *Definimos o **símbolo de Kronecker** (ou **delta de Kronecker**), δ_{ij}, para $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, como*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j. \end{cases}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $1 \leq i \leq n$, denotemos por e_i o vetor

$$e_1 = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{i(j-1)}, \delta_{ij}, \delta_{i(j+1)}, \ldots, \delta_{in}) = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$$

*em $\mathbb{R}^n$, onde a componente 1 se encontra na i-ésima posição. O conjunto $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é LI e gera todo $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Com a ordenação dada pelos índices dos e_i dizemos que S é uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$ e esta é a **base canônica** de $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.38 *$S = \{(1,2,0),(0,1,1),(-2,3,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial.*

Exemplo 2.39 *$S = \{(1,0),(0,1),(1,2)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Apesar de $\langle S \rangle = \mathbb{R}^2$, temos que S é um conjunto LD. Porém se considerarmos o subconjunto $B = \{(1,0),(0,1)\} \subset S$, temos que B é uma base de $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 2.40 $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *é a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial.*

Exemplo 2.41 *$S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é base do espaço vetorial real $P_n(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau até n.*

Exemplo 2.42 *$S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ é base (infinita) do espaço vetorial real $P(\mathbb{R})$ dos polinômios em uma variável real.*

Observação 2.1 *Quando a base de um espaço é finita dizemos que o espaço é de **dimensão finita**, do contrário, o espaço é de **dimensão infinita**.*

Exemplo 2.43 *Vamos encontrar uma base para o subespaço*

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a = -b \quad e \quad d = 0 \right\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

Note que, podemos reescrever W como

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -b & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : \ b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Daí

$$\begin{pmatrix} -b & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e como esses dois vetores são LI, eles formam, portanto, uma base de W.

Note que, dado $S \subset V$ um subconjunto LI de um espaço vetorial V, se $\langle S \rangle = V$, então S é base de V. Caso contrário, existe um vetor $v \in V$, mas $v \notin \langle S \rangle$. Daí o conjunto

$$S' = S \cup \{v\}$$

é LI. E novamente, podemos ter $\langle S' \rangle = V$, e neste caso, S' seria uma base de V, ou podemos ter $\langle S' \rangle \neq V$. Nesse último caso, podemos proceder de forma análoga e criar um conjunto maior contendo S' que ainda seria LI. Continuando esse processo, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.2 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Qualquer subconjunto $S \subset V$ de vetores LI pode ser completado com o objetivo de formarmos uma base.*

Por outro lado, seja $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto gerador de um espaço vetorial V. Se S é LI, temos que S é uma base de V. Se S é LD, então algum dos vetores de S, digamos v_k, pode ser escrito como combinação linear dos demais vetores de S, neste caso, consideramos um novo conjunto S' sendo formado pelos vetores de S, exceto o vetor v_k. S' continuará gerando o espaço V. E novamente procedemos da mesma forma, se S' for LI, então será uma base de V. Do contrário, podemos eliminar mais um vetor do conjunto. Continuando o processo, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Em qualquer subconjunto $S \subset V$ de geradores de V pode-se extrair uma base para V.*

Teorema 2.4 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Então toda base de V possui o mesmo número de elementos.*

Definição 2.3 *Seja* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *uma base do espaço vetorial* V*. Dizemos que a* ***dimensão*** *de* V *é* n *e denotamos por* $dimV = n$*.*

Observação 2.2 *Por convenção iremos admitir que a dimensão do espaço nulo é 0.*

Exemplo 2.44 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$ *e considere a base* $S = \{(1,0),(0,1)\}$ *de* V*. Então* $dimV = 2$*.*

Exemplo 2.45 *Se* $V = M_2(\mathbb{R})$ *então* $dimV = 4$*.*

Exemplo 2.46 *Se* $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *então* $dimV = m \cdot n$*.*

Exemplo 2.47 *Se* $V = P_2(\mathbb{R})$ *é o espaço dos polinômios de grau até dois em uma variável real, então* $dimV = 3$*.*

Exemplo 2.48 *Se* $V = P_n(\mathbb{R})$*, então* $dimV = n + 1$*.*

Exemplo 2.49 *Seja* $W = \{(x, y, z) : \; x + 3y = z \quad e \quad y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$*. Vamos determinar a dimensão de* W*. Primeiro observe que,* W *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$ *e o espaço* $\mathbb{R}^3$ *tem dimensão 3, já que* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *é base de* $\mathbb{R}^3$*. Logo a dimensão de* W *é 0, 1, 2 ou 3. Vejamos o que nos diz as condições definidoras de* W*:*

$$\left\{\begin{array}{c} x + 3y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow y = z \qquad e \qquad x = -2z.$$

Logo,

$$W = \{(-2z, z, z) : \; z \in \mathbb{R}\} = \langle(-2, 1, 1)\rangle.$$

Portanto $S = \{(-2, 1, 1)\}$ *é uma base de* W *e daí* $dimW = 1$*.*

Exemplo 2.50 *Sejam* $V = \mathbb{R}^4$ *e os subespaços*

$$W_1 = \{(x, y, z, w) : \; x + y = w - z \quad e \quad y + w = 0\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$W_2 = \{(x, y, z, w) : \; x = y = 0 \quad e \quad 2w + z = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Queremos determinar os seguintes itens:

(a) $dimW_1$

(b) $dimW_2$

(c) $dim(W_1 \cap W_2)$

(d) $dim(W_1 + W_2)$

(e) $W_1 + W_2 = V$*?* $W_1 + W_2$ *é soma direta?*

Para determinar a dimensão de W_1 observe que suas condições definidoras nos dão o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y=w-z \\ y+w=0 \end{cases} \Rightarrow y=-w \qquad e \qquad x=2w-z.$$

Logo

$$W_1 = \{(2w-z,-w,z,w): \ z,w\in\mathbb{R}\} = \{w(2,-1,0,1)+z(-1,0,1,0): \ z,w\in\mathbb{R}\}$$

e daí $W_1 = \langle(2,-1,0,1),(-1,0,1,0)\rangle$. Agora observe que, se $a,b\in\mathbb{R}$ são tais que

$$a\cdot(2,-1,0,1)+b\cdot(-1,0,1,0)=(0,0,0,0)$$

temos $a=0=b$, então o conjunto formado pelos dois vetores é LI e portanto temos uma base de W_1. Dessa forma temos que $dim W_1 = 2$.

Para determinar a dimensão de W_2 observe que suas condições definidoras nos dão $x=y=0$ e $z=-2w$. Logo

$$W_2 = \{(0,0,-2w,w): \ w\in\mathbb{R}\} = \{w(0,0,-2,1): \ w\in\mathbb{R}\}$$

e daí $W_2 = \langle(0,0,-2,1)\rangle$ e portanto temos uma base de W_2, já que um conjunto formado por apenas um vetor é sempre LI. Dessa forma temos que $dim W_2 = 1$.

Para determinar a dimensão do subespaço $W_1\cap W_2$, observe que, neste caso, devemos levar em consideração as condições definidoras dos dois subespaços, isto é

$$\begin{cases} x+y=w-z \\ y+w=0 \\ x=y=0 \\ 2w+z=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=w=0.$$

Logo $W_1\cap W_2=\{0\}$ e então $dim(W_1\cap W_2)=0$.

Observe que, da intersecção obtida acima temos que W_1+W_2 é soma direta, resta saber se essa soma direta resulta em $\mathbb{R}^4$. Temos pelo que fizemos até aqui que:

$$W_1 = \{(2w-z,-w,z,w): \ z,w\in\mathbb{R}0\}$$

$$W_2 = \{(0,0,-2a,a): \ a\in\mathbb{R}\}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} W_1+W_2 &= \{(2w-z,-w,z-2a,w+a): \ a,z,w\in\mathbb{R}\} \\ &= \{w(2,-1,0,1)+z(-1,0,1,0)+a(0,0,-2,1): a,z,w\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Logo

$$W_1 + W_2 = \langle (2,-1,0,1), (-1,0,1,0), (0,0,-2,1) \rangle.$$

Vejamos se os três vetores formam um conjunto LI. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(2,-1,0,1) + b(-1,0,1,0) + c(0,0,-2,1) = (0,0,0,0).$$

Resolvendo o sistema obtido da igualdade acima, obtemos $a = b = c = 0$ e, portanto temos uma base para $W_1 + W_2$ formada por esses três vetores. Então $dim(W_1 + W_2) = 3$ e consequentemente $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}^4$, pois $dim\mathbb{R}^4 = 4$.

Teorema 2.5 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e W_1 e W_2 subespaços de V. Então*

$$dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2).$$

Exemplo 2.51 *Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e os subespaços*

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Queremos determinar os seguintes itens:

(a) $dimW_1$

(b) $dimW_2$

(c) $dim(W_1 \cap W_2)$

(d) $dim(W_1 + W_2)$

(e) $W_1 + W_2 = V$*?* $W_1 + W_2$ *é soma direta?*

Para determinar a dimensão de W_1 observe que sua condição definidora nos dá o seguinte:

$$x = 2z - y.$$

Logo

$$W_1 = \{(2z - y, y, z) : \ y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0) + z(2,0,1) : \ y, z \in \mathbb{R}\}$$

e daí $W_1 = \langle (-1,1,0), (2,0,1) \rangle$. Agora observe que, se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que

$$a \cdot (-1,1,0) + b \cdot (2,0,1) = (0,0,0)$$

temos $a = 0 = b$, então o conjunto formado pelos dois vetores é LI e portanto temos uma base de W_1. Dessa forma temos que $dimW_1 = 2$.

Para determinar a dimensão de W_2 observe que sua condição definidora nos dá

$$y = -z.$$

Logo

$$W_2 = \{(x, -z, z) : \ x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + z(0, -1, 1) : \ x, z \in \mathbb{R}\}$$

e daí $W_2 = \langle (1, 0, 0), (0, -1, 1) \rangle$. Agora observe que, se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que

$$a \cdot (1, 0, 0) + b \cdot (0, -1, 1) = (0, 0, 0)$$

temos $a = 0 = b$, então o conjunto formado pelos dois vetores é LI e portanto temos uma base de W_2. Dessa forma temos que $dim W_2 = 2$.

Para determinar a dimensão do subespaço $W_1 \cap W_2$, observe que, neste caso, devemos levar em consideração as condições definidoras dos dois subespaços, isto é

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad y = -z \qquad e \qquad x = 3z.$$

Logo $W_1 \cap W_2 = \{z(3, -1, 1) : \ z \in \mathbb{R}\} = \langle (3, -1, 1) \rangle$ e então $dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

Observe que, usando o Teorema 2.5 temos que

$$dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Como $(W_1 + W_2) \subset \mathbb{R}^3$ e $dim \mathbb{R}^3 = 3 = dim(W_1 + W_2)$, segue que

$$\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2,$$

porém a soma não é direta, já que $dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

Observação 2.3 *Algumas consequências seguem naturalmente das definições de espaço gerado, conjunto linearmente independente e base de um espaço vetorial:*

- *Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente também é linearmente independente;*
- *Todo conjunto que possui um subconjunto linearmente dependente é linearmente dependente;*
- *Se $dim V = n$ então qualquer conjunto de n vetores linearmente independente é uma base de V;*
- *Se $dim V = n$ então qualquer conjunto de k vetores com $k > n$ é linearmente dependente;*
- *Todo conjunto que possui o vetor nulo é linearmente dependente;*
- *Se W é subespaço de V então $dim W \leq dim V$ e $dim W = dim V$ se, e somente se, $W = V$.*

2.4.3 Mudança de base

Como vimos, um mesmo espaço vetorial pode ter várias bases distintas, sendo que sobre essas bases, o que sabemos é que elas devem possuir o mesmo número de elementos, que chamamos de dimensão do espaço. Para finalizar este capítulo veremos como relacionar uma base a outra de um espaço vetorial. Basicamente, dado um elemento em um mesmo esapço vetorial, iremos associar a este elemento coordenadas relacionadas a cada base que estivermos utilizando como base do nosso espaço.

Teorema 2.6 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Então para todo $v \in V$ existem únicos escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.$$

Demonstração: Como $V = \langle B \rangle$, é claro que para $v \in V$, existem $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.$$

Suponha que existam também $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n.$$

Queremos mostrar que $a_i = b_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. De fato, das duas igualdades temos

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n \Leftrightarrow$$

$$(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0.$$

Como B é base de V, então B é um conjunto LI, logo a única forma de termos a igualdade acima é se

$$a_i - b_i = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq n$, portanto, segue que $a_i = b_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

■

Definição 2.4 *Com as condições do teorema anterior, definimos as coordenadas de $v \in V$ em relação a base B como sendo*

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.52 *Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $B = \{(1,0), (0,1)\}$ uma base de V. Dado $v = (-1, 3)$, temos que*

$$v = -1(1,0) + 3(0,1)$$

Portanto
$$[v]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, considere $B' = \{(1,1),(2,-1)\}$ outra base de V e vamos determinar as coordenadas de v nesta base:

$$v = (-1,3) = a(1,1) + b(2,-1) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} a + 2b = -1 \\ a - b = 3 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{3} \quad e \quad b = -\frac{4}{3}$$

e daí temos
$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.53 *Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$ e $B = \{1, x, x^2\}$ e $B' = \{1, (1-x), (1-x)^2\}$ bases de V. Vamos determinar as coordenadas de $v = p(x) = 3 - 4x + x^2$ nessas bases. Sejam $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ tais que*

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad e \qquad [v]_{B'} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}.$$

Daí

- $3 - 4x + x^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad a = 3, \quad b = -4, \quad c = 1.$

- $3 - 4x + x^2 = a' \cdot 1 + b' \cdot (1-x) + c' \cdot (1-x)^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} a' + b' + c' = 3 \\ -b' - 2c' = -4 \\ c' = 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow$

  $c' = 1, \quad b' = 2, \quad a' = 0.$

Portanto,
$$[v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad [v]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ bases de V. Dado $v \in V$, podemos escrver v de maneira única como combinação linear dos elementos de B ou de B' como segue

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

$$v = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \cdots + b_n w_n.$$

Mas note que, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ também são vetores de V, logo também podem ser escritos como combinações lineares de elementos de B', como segue

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{n1}w_n \\ v_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{n2}w_n \\ \vdots \\ v_n = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{nn}w_n. \end{cases}$$

Daí podemos reescrever v como

$$v = a_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{n1}w_n) + a_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdot + a_{n2}w_n) + \cdots + a_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{nn}w_n).$$

Reeorganizando os termos, temos

$$v = (a_1a_{11} + a_2a_{12} + \cdots + a_na_{1n})w_1 + \cdots + (a_1a_{n1} + a_2a_{n2} + \cdots + a_na_{nn})w_n$$

que é exatamente a escrita de v como combinação linear dos elementos da base B'. E daí teremos

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_{11} + a_2a_{12} + \cdots + a_na_{1n} \\ \vdots \\ a_1a_{n1} + a_2a_{n2} + \cdots + a_na_{nn} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{[v]_{B'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{[I]_{B'}^{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[v]_B}$$

A matriz $[I]_{B'}^{B}$ é chamada **matriz mudança de base** de B para B'. E observe que cada coluna j dessa matriz é dada por $[v_j]_{B'}$, as coordenadas dos vetores da base B na base B'.

Exemplo 2.54 *Sejam* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $B = \{(1,0), (0,1)\}$, $B' = \{(1,1), (2,-1)\}$ *bases de* V. *Vamos determinar* $[I]_{B'}^{B}$ *e* $[I]_{B}^{B'}$.

- *Para determinar* $[I]_{B'}^{B}$ *precisamos determinar as coordenadas dos vetores de* B *na base* B'. *Temos*

$$(1,0) = a(1,1) + b(2,-1) \Rightarrow (1,0) = (a + 2b, a - b) \Rightarrow a = b = \frac{1}{3}$$

$$(0,1) = c(1,1) + d(2,-1) \Rightarrow (0,1) = (c + 2d, c - d) \Rightarrow c = \frac{2}{3} \quad e \quad d = -\frac{1}{3}$$

Logo

$$[I]_{B}^{B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- *Para determinar $[I]_B^{B'}$ precisamos determinar as coordenadas dos vetores de B' na base B. Temos*
$$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$
$$(2,-1) = 2(1,0) + (-1)(0,1),$$
Logo
$$[I]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.4.4 Exercícios

(1) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dados dois vetores $u, v \in V$, mostre que eles são linearmente dependentes se, e somente se, um é múltiplo escalar do outro.

(2) Considere os espaços vetoriais V dados abaixo munidos das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar. Para cada caso abaixo, responda se $S \subset V$ é um conjunto LI ou LD em V:

(a) $V = \mathbb{C}^3$, $\quad S = \{(1,1,1), (i, 2i, i), (2,1,2)\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S = \{(1,1,1), (1,2,3), (1,4,9)\}$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S = \{(1,2,3), (2,1,-2), (3,1,1), (4,-1,-2)\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^2$, $\quad S = \{(1,1), (-1,1)\}$.

(e) $V = M_2(\mathbb{C})$, $\quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(f) $V = P(\mathbb{R})$, $\quad S = \{x^3 - 5x^2 + 1, 2x^4 + 5x - 6, x^2 - 5x + 2\}$.

(g) $V = P_2(\mathbb{C})$, $\quad S = \{1, x + i, (x+i)^2\}$.

(3) Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ e $S = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\} \subset \mathbb{K}^3$. S é LI ou LD?

(4) $V = \mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais. Determine uma base e sua dimensão.

(5) Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (1,1,1)$. $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$? Justifique.

(6) Seja $W = \langle v_1 = (1,-1,0,0), v_2 = (0,0,1,1), v_3 = (-2,2,1,1), v_4 = (1,0,0,0) \rangle \subset \mathbb{R}^4$.

(a) $(2,-3,2,2) \in W$? Justifique.

(b) Exiba uma base para W. Qual a dimensão?

(c) $W = \mathbb{R}^4$? Por quê?

(7) Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 1, -2)$, $v_3 = (3, 1, 1)$, $v_4 = (4, -1, -2)$.

(a) Estes vetores são LD. Justifique.

(b) Expresse o vetor nulo como combinação linear destes vetores, na qual os coeficientes do da combinação não sejam todos nulos.

(8) Considere o sistema linear homogêneo $\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ 6y - 4z = 0 \end{cases}$

(a) Se $W \subset \mathbb{R}^3$ é o subespaço solução do sistema acima, obtenha uma base e a dimensão de W.

(b) Se $U \subset \mathbb{R}^3$ é o espaço gerado pelos vetores-linha da matriz de coeficientes do sistema acima, obtenha uma base e a dimensão de U.

(9) Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y = 0 \quad \text{e} \quad z - t = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$.

(a) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

(b) Determine $W_1 + W_2$. A soma é direta?

(c) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$?

(10) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a = d \quad \text{e} \quad b = c \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a = c \quad \text{e} \quad b = d \right\}$ subespaços de $M_2(\mathbb{C})$.

(a) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

(b) Determine $W_1 + W_2$. A soma é direta?

(c) $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{C})$?

(11) Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$ e W o subespaço de V gerado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Encontre uma base e a dimensão de W.

(12) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos seguintes vetores:

$$v_1 = (1, 1, 3, 1), \qquad v_2 = (1, -3, 15, 9), \qquad v_3 = (1, 2, 0, -1).$$

(a) Obtenha uma base para W.

(b) Complete essa base obtida no item (a) até que se tenha uma base para o $\mathbb{R}^4$.

(13) Mostre que $B = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e obtenha as coordenadas de $u = (1,0,0)$ em relação à base B.

(14) Sejam $B = \{(1,0),(0,1)\}$, $B_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $B_2 = \{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$ e $B_3 = \{(2,0),(0,2)\}$, bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

(a) Obtenha as matrizes de mudança de base:

(i) $[I]^{B}_{B_1}$

(ii) $[I]^{B_1}_{B}$

(iii) $[I]^{B}_{B_2}$

(iv) $[I]^{B}_{B_3}$

(b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3,-2)$ em relação as bases b, B_1, B_2 e B_3?

(c) As coordenadas de um vetor u em relação a base B_1 são dadas por $[u]_{B_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quais são as coordenadas de u em relação às bases B, B_2 e B_3?

(15) Sejam $V = \mathbb{R}^3$, B e B' bases ordenadas de V e seja

$$[I]^{B'}_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obtenha $[u]_B$, se $[u]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e obtenha $[w]_{B'}$, se $[w]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(16) Seja V o espaço das matrizes triangulares superiores de ordem 2 sobre $\mathbb{R}$ e sejam

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

duas bases de V. Obtennha $[I]^{B}_{B'}$.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

3.1 Primeiras definições

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $T : V \to W$ é uma **transformação linear** se para quaisquer $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos satisfeitas as seguintes condições:

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Exemplo 3.1 *Considere o* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *e a aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x, y) = (x + y, x - y)$. *Mostremos que* T *é uma transformação linear. De fato, dados* $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *temos:*

$$\begin{aligned}
T(u + v) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)) \\
&= (x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
T(\alpha u) &= T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1) \\
&= \alpha(x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\
&= \alpha T(u)
\end{aligned}$$

Portanto T *é uma transformação linear.*

Exemplo 3.2 *Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, 1)$. Note que T não é uma transformação linear. De fato, dados $u = (1, 1), v = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$, observe que*

$$T(u + v) = T(3, 2) = (5, 1)$$

é diferente de

$$T(u) + T(v) = T(1, 1) + T(2, 1) = (2, 1) + (3, 1) = (5, 2).$$

Exemplo 3.3 *Considere os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (3x, 0, x - y)$. Mostremos que T é uma transformação linear. De fato, dados $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:*

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (3x_1 + 3x_2, 0, x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)) \\ &= (3x_1 + 3x_2, 0, x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \\ &= (3x_1, 0, x_1 - y_1) + (3x_2, 0, x_2 - y_2) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} T(\alpha u) &= T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\ &= (3\alpha x_1, 0, \alpha x_1 - \alpha y_1) \\ &= \alpha(3x_1, 0, x_1 - y_1) \\ &= \alpha T(u) \end{aligned}$$

Portanto T é uma transformação linear.

Exemplo 3.4 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, a aplicação $I : V \to V$ definida por $I(v) = v$ para todo $v \in V$ é uma transformação linear chamada* ***identidade****.*

Exemplo 3.5 *Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}$ e a aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$. Note que T não é uma transformação linear. De fato, dados $u = 2, v = 3 \in \mathbb{R}$, observe que*

$$T(u + v) = T(5) = 25$$

é diferente de

$$T(u) + T(v) = 4 + 9 = 13.$$

Proposição 3.1 *Se T é uma transformação linear então $T(0) = 0$, ou seja, o vetor nulo do espaço vetorial do domínio é levado no vetor nulo do espaço vetorial do contradomínio.*

Demonstração: Seja 0 o vetor nulo do domínio de T, então

$$0 + 0 = 0 \Rightarrow T(0 + 0) = T(0) \Rightarrow T(0) + T(0) = T(0).$$

Como $T(0)$ é um vetor no contradomínio, existe o seu oposto $-T(0)$ e somando esse oposto dos dois lados da última igualdade acima, temos

$$T(0) = 0.$$

■

Exemplo 3.6 *Considere $P(\mathbb{R})$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial dos polinômios em uma variável e a aplicação derivada $D : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ definida por $D(p(x)) = p'(x)$. Observe que, se $p(x), q(x) \in P(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos*

$$D(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) = D(p(x)) + D(q(x))$$

e

$$D(\alpha p(x)) = (\alpha p(x))' = \alpha p'(x) = \alpha D(p(x)).$$

Portanto a aplicação derivada D é uma transformação linear.

Exemplo 3.7 *Seja $\mathcal{C}([a, b])$ o espaço das funções contínuas no intervalo $[a, b]$. A aplicação que calcula a integral definida de a até b, denotada por $T : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{R}$ e dada por $T(f(x)) = \int_a^b f(x)dx$ é uma transformação linear.*

Observe que é imediato da definição que se $T : V \to W$ é uma transformação linear entre os $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V e W temos

- $T(-u) = -T(u)$ para todo $u \in V$;
- $T(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_nT(v_n)$, para todos $a_i \in \mathbb{K}$ e $v_i \in V$.

Teorema 3.1 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Então dados n vetores $w_1, w_2, \ldots, w_n$ de W, existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todos $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração: Existência: Seja $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \in V$, basta definir $T : V \to W$ por $T(v) = a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n$. É fácil verificar que T é transformação linear e que $T(v_i) = w_i$.

Unicidade: Suponha que exista $F : V \to W$ tal que $F(v_i) = w_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Seja $v \in V$, então $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Assim

$$\begin{aligned} F(v) &= F(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) \\ &= a_1F(v_1) + \cdots + a_nF(v_n) \\ &= a_1w_1 + \cdots + a_nw_n = T(v). \end{aligned}$$

Logo, $F = T$. ■

Exemplo 3.8 *Vamos determinar a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(1,0) = (0,1,2)$, $T(0,1) = (-3,4,1)$.

Note que, $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *é base de* $\mathbb{R}^2$ *e dado* $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *temos*

$$v = (x,y) = x(1,0) + y(0,1),$$

daí

$$\begin{aligned} T(v) = T(x,y) &= T(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= xT(1,0) + yT(0,1) \\ &= x(0,1,2) + y(-3,4,1) \\ &= (-3y, x+4y, 2x+y). \end{aligned}$$

Portanto, $T(x,y) = (-3y, x+4y, 2x+y)$.

Exemplo 3.9 *Vamos determinar a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(1,1) = (0,1,2)$, $T(-1,0) = (-3,4,1)$.

Note que, $B = \{(1,1),(-1,0)\}$ *é base de* $\mathbb{R}^2$ *e dado* $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *temos*

$$v = (x,y) = a(1,1) + b(-1,0),$$

logo

$$\begin{cases} a - b = x \\ a = y \end{cases}$$

E então, $a = y$ *e* $b = y - x$. *Assim*

$$v = (x,y) = y(1,1) + (y-x)(-1,0),$$

daí

$$\begin{aligned} T(v) = T(x,y) &= T(y(1,1) + (y-x)(-1,0)) \\ &= yT(1,1) + (y-x)T(-1,0) \\ &= y(0,1,2) + (y-x)(-3,4,1) \\ &= (-3y+3x, 5y-4x, 3y-x). \end{aligned}$$

Portanto, $T(x,y) = (-3y+3x, 5y-4x, 3y-x)$.

Exemplo 3.10 *Vamos determinar a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *tal que* $T(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $T(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Note que, $B = \{(1,0),(0,-1)\}$ *é base de* $\mathbb{R}^2$ *e dado* $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *temos*

$$v = (x,y) = x(1,0) - y(0,-1),$$

daí

$$\begin{aligned} T(v) = T(x,y) &= T(x(1,0) - y(0,-1)) \\ &= xT(1,0) - yT(0,-1) \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - y \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & x+y \\ 0 & -3y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, $T(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & x+y \\ 0 & -3y \end{pmatrix}$.

3.1.1 Núcleo e imagem de uma transformação linear

Definição 3.1 *Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear. O conjunto*

$$N(T) = \{v \in V : \ T(v) = 0\}$$

é chamado de ***núcleo*** *de* T *e o conjunto*

$$Im(T) = \{w \in W : \ \textit{existe} \quad v \in V \quad \textit{tal que} \quad T(v) = w\}$$

é chamado de ***imagem*** *de* T.

Observe que $N(T) \neq \emptyset$ e $Im(T) \neq \emptyset$, pois $T(0) = 0$.

Proposição 3.2 *Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear.*

(i) $N(T)$ *é um subespaço de* V.

(ii) $Im(T)$ *é um subespaço de* W.

Demonstração:

(i) Como já vimos, $N(T) \neq \emptyset$ e por definição $N(T) \subset V$. Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u, v \in N(T)$, isto é, $T(u) = 0$ e $T(v) = 0$. Vamos mostrar que $u + v \in N(T)$ e que $\alpha u \in N(T)$. De fato,

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0$$

e

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $N(T)$ é subespaço vetorial de V.

(ii) Como já vimos, $Im(T) \neq \emptyset$ e ainda, por definição, $Im(T) \subset W$. Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $w_1, w_2 \in Im(T)$, isto é, existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Vamos mostrar que $w_1 + w_2 \in Im(T)$ e $\alpha w_1 \in Im(T)$. De fato, observe que

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2 \Rightarrow w_1 + w_2 \in Im(T)$$

e

$$T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha w_1 \Rightarrow \alpha w_1 \in Im(T).$$

Portanto, $Im(T)$ é subespaço de W.

■

Exemplo 3.11 *Vamos determinar o núcleo e a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (y, x, -2x)$. O núcleo de T é dado por*

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ T(x,y) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (y, x, -2x) = (0,0,0)\} \\ &= \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

E a imagem de T é dada por

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \textit{existe} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \textit{tal que} \quad T(a,b) = (x,y,z)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \textit{existe} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \textit{tal que} \quad (b,a,-2a) = (x,y,z)\} \\ &= \{(b,a,-2a) : \ a,b \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,0), (0,1,-2) \rangle. \end{aligned}$$

Exemplo 3.12 *Vamos determinar o núcleo e a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 0, y + z, x + y - 2z)$. O núcleo de T é dado por*

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ T(x,y,z) = (0,0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x+2y-z, 0, y+z, x+y-2z) = (0,0,0)\} \end{aligned}$$

Ou seja, estamos procurando por (x, y, z) que são solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad z = -y \quad e \quad x = -3y.$$

Logo

$$N(T) = \{(-3y, y, -y) : \ \ y \in \mathbb{R}\} = \langle(-3, 1, -1)\rangle \qquad \Rightarrow \qquad dimN(T) = 1.$$

E a imagem de T é dada por

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x, y, z, w) : \ \exists \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad tal\ que \quad T(a, b, c) = (x, y, z, w)\} \\ &= \{(x, y, z, w) : \ \exists \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad tal\ que \quad (a + 2b - c, 0, b + c, a + b - 2c) = (x, y, z, w)\} \\ &= \{(a + 2b - c, 0, b + c, a + b - 2c) : \ a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(1, 0, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, -2)\rangle. \end{aligned}$$

É possível mostrar que os vetores geradores do conjunto imagem encontrados acima são linearmente dependentes e que $Im(T) = \langle(1, 0, 0, 1), (2, 0, 1, 1)\rangle$. Logo, $dimIm(T) = 2$.

Exemplo 3.13 *Vamos determinar o núcleo e a imagem da transformação linear $F : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por $F(A) = M \cdot A$, onde $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.*

Observe que, se $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, então

$$F(A) = M \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z & y - t \\ -2x + 2z & -2y + 2t \end{pmatrix}.$$

O núcleo de F é dado por

$$\begin{aligned} N(F) &= \left\{A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ F(A) = 0\right\} \\ &= \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) : \ \begin{pmatrix} x - z & y - t \\ -2x + 2z & -2y + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Ou seja, estamos procurando por x, y, z, t que são solução do sistema

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ -2y + 2t = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x = z \quad e \quad y = t.$$

Logo

$$N(F) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} : \ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \Rightarrow \qquad dim N(F) = 2.$$

E a imagem de F é dada por

$$\begin{aligned} Im(F) &= \left\{ \begin{pmatrix} x - z & y - t \\ -2x + 2z & -2y + 2t \end{pmatrix} : \ x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

É possível mostrar que as matrizes geradoras do conjunto imagem encontrados acima são linearmente dependentes e que $dim Im(F) = 2$.

Teorema 3.2 (Teorema do Núcleo e da Imagem (TNI)) *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear com V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Então,*

$$dim N(T) + dim Im(T) = dim V.$$

Demonstração: Sabemos que $N(T)$ é um subespaço vetorial de V. Vamos supor que $dim N(T) = t$ e que $B = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ é base de $N(T)$. Podemos completar B até obter uma base $B' = \{u_1, \dots, u_t, v_1, \dots, v_s\}$ de V, logo $dim V = t + s$. Daí, resta mostrar que $dim Im(T) = s$. Para isso vamos provar que $B'' = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_s)\}$ é base de $Im(T)$.

- B'' é LI.

  De fato, sejam $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}$, tais que

  $$a_1 T(v_1) + \dots + a_s T(v_s) = 0,$$

  daí, temos

  $$T(a_1 v_1 + \dots + a_s v_s) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_1 v_1 + \dots + a_s v_s) \in N(T),$$

  logo, como B é base de $N(T)$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{K}$, tais que

  $$a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_s v_s - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_t u_t = 0.$$

  Como, B' é base de V, e portanto um conjunto LI, essa última igualdade só é possível se

  $$a_1 = \dots = a_s = \alpha_1 = \dots = \alpha_t = 0.$$

  Assim, como $a_1 = \dots = a_s = 0$, segue que B'' é um conjunto LI.

- $Im(T) = \langle B'' \rangle$.

  De fato, dado $w \in Im(T)$, por definição, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Como $v \in V$ e B' é base de V, então existem $b_1, b_2, \ldots, b_{s+t} \in \mathbb{K}$, tais que

  $$v = b_1 u_1 + \cdots + b_t u_t + b_{t+1} v_1 + \cdots + b_{s+t} v_s.$$

  Daí,

  $$w = T(v) = \underbrace{T(b_1 u_1 + \cdots + b_t u_t)}_{0} + T(b_{t+1} v_1 + \cdots + b_{s+t} v_s) = b_{t+1} T(v_1) + \cdots + b_{s+t} T(v_s),$$

  logo B'' gera o conjunto imagem de T.

$\blacksquare$

3.1.2 Isomorfismo e transformações inversas

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Dizemos que T é **injetora** se toda vez que $T(v) = T(w)$ tivermos $v = w$. Se $Im(T) = W$, dizemos que T é **sobrejetora**, isto é, T é sobrejetora se para todo $w \in W$, existir um $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Se T for injetora e sobrejetora simultaneamente, dizemos que T é **bijetora**.

Segue da definição de sobrejetividade e do fato de $Im(T)$ ser um subespaço vetorial de W que T é sobrejetora se, e somente se, $dim Im(T) = dim W$.

Proposição 3.3 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.*

Demonstração: Queremos provar que o único elemento do núcleo de T é o vetor nulo 0. Sabemos que, de fato, $0 \in N(T)$, pois $T(0) = 0$. Agora seja $v \in N(T)$, isto é, $T(v) = 0$. Daí temos

$$T(v) = 0 = T(0).$$

Como, por hipótese, T é injetora então

$$T(v) = T(0) \quad \Rightarrow \quad v = 0,$$

e, portanto, $N(T) = \{0\}$.

Reciprocamente, sejam $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$, daí temos

$$T(u) = T(v) \quad \Rightarrow \quad T(u) - T(v) = 0 \quad T(u - v) = 0.$$

Logo, $u - v \in N(T)$ e como $N(T) = \{0\}$, segue que

$$u - v = 0 \quad \Rightarrow \quad u = v$$

e, portanto, T é injetora.

$\blacksquare$

Exemplo 3.14 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (y, x, -2x)$. O núcleo de T é dado por*

$$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; T(x, y) = (0, 0, 0)\},$$

ou seja, estamos procurando $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que

$$(y, x, -2x) = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad e \quad y = 0.$$

Logo, $N(T) = \{0\}$ e então $dim N(T) = 0$ e T é injetora. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem (TNI), temos

$$dim\mathbb{R}^2 = dimN(T) + dimIm(T),$$

segue disso que

$$dimIm(T) = 2.$$

Como $dimIm(T) \neq dim\mathbb{R}^3$, então T não é sobrejetora e portanto, não é bijetora.

Exemplo 3.15 *Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z, w) = (x - y, w, z)$. O núcleo de T é dado por*

$$N(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \;\; T(x, y, z, w) = (0, 0, 0)\},$$

ou seja, estamos procurando $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, tal que

$$(x - y, w, z) = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad x = y, \quad z = 0 \quad e \quad w = 0.$$

Logo,

$$N(T) = \{(x, x, 0, 0) : \;\; x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0, 0) \rangle$$

e então $dimN(T) = 1$ e T não é injetora. Pelo TNI, temos

$$dim\mathbb{R}^4 = dimN(T) + dimIm(T),$$

segue disso que

$$dimIm(T) = 3.$$

Como $dimIm(T) = dim\mathbb{R}^3$, então T é sobrejetora, mas não é bijetora, já que não que injetora.

Exemplo 3.16 *Seja $T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por $T(A) = M \cdot A$, onde $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. O núcleo de T é dado por*

$$N(T) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \ T(A) = 0\},$$

ou seja, estamos procurando $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x-z & y-w \\ -2x+2z & -2y+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

daí, segue que $x = z$ e $y = w$. Logo,

$$N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} : \ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e então $dim N(T) = 2$ e T não é injetora. Pelo TNI, temos

$$dim M_2(\mathbb{R}) = dim N(T) + dim Im(T),$$

segue disso que

$$dim Im(T) = 2.$$

Como $dim Im(T) \neq dim M_2(\mathbb{R})$, então T não é sobrejetora. Portanto, T também não é bijetora.

Proposição 3.4 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $T: V \to W$ é uma transformação linear injetora e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é um conjunto linearmente independente, então $\beta' = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ também é linearmente independente.*

Demonstração: Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2 + \cdots + a_n T(v_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) = 0,$$

onde a implicação acima é possível porque T é transformação linear. Da última igualdade temos que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$ está no núcleo de T e como T é injetora, $N(T) = \{0\}$. Logo,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

e como β é um conjunto linearmente independente, segue que

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Portanto, β' é linearmente independente. ∎

Proposição 3.5 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e $dimV = dimW$. Então as afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) T é injetora.

(ii) T é sobrejetora.

(iii) T é bijetora.

(iv) T "leva" bases de V em bases de W, ou seja, se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é base de V, então $\beta' = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é base de W.

Definição 3.2 *Se $T : V \to W$ é uma transformação linear bijetora, então T é chamada de **isomorfismo**.*

Exemplo 3.17 *A aplicação $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d)$ é um isomorfismo, já que T é transformação linear e é bijetora.*

Quando existe um isomorfismo $T : V \to W$, dizemos que V é isomorfo a W ou que V e W são isomorfos e denotamos por $V \simeq W$.

Se V é um espaço vetorial sobre os reais e $dimV = n$, então $V \simeq \mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.18 *A aplicação $T : P_n(\mathbb{R}) \to R^{n+1}$ definida por*

$$T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

é um isomorfismo. Assim, se quisermos verificar se o conjunto

$$B = \{1, (1-x), (1-x)^2, (1-x)^3\}$$

é linearmente independente ou linearmente dependente em $P_3(\mathbb{R})$, podemos usar o isomorfismo definido (fazendo $n = 3$) e verificarmos se o conjunto das imagens dos elementos de B é um conjunto LI em $\mathbb{R}^4$. Temos,

$$T(1) = (1, 0, 0, 0); \quad T(1-x) = (1, -1, 0, 0);$$

$$T((1-x)^2) = (1, -2, 1, 0); \quad T((1-x)^3) = (1, -3, 3, -1).$$

Logo, verificar se B é LI em $P_3(\mathbb{R})$ é equivalente a verificar se

$$B' = \{(1, 0, 00), (1, -1, 0, 0), (1, -2, 1, 0), (1, -3, 3, -1)\}$$

é LI em $\mathbb{R}^4$.

Observação 3.1 *As linhas não nulas de uma matriz $m \times n$ linha-reduzida à forma escalonada correspondem a vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^n$,*

Exemplo 3.19 *Vamos verificar se o conjunto $B = \{1, 2x, x^2+1, x^3, x^4-2\}$ é base de $P_4(\mathbb{R})$. Para isso, vamos utilizar o fato de que $P_4(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^5$. Neste caso, podemos utilizar o isomorfismo que identifica os elementos de B com elementos de $\mathbb{R}^5$, da seguinte forma*

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leftrightarrow & (1,0,0,0,0) \\ 2x & \leftrightarrow & (0,2,0,0,0) \\ x^2+1 & \leftrightarrow & (1,0,1,0,0) \\ x^3 & \leftrightarrow & (0,0,0,1,0) \\ x^4-2 & \leftrightarrow & (-2,0,0,0,1). \end{array}$$

Assim, se mostrarmos que os elementos de R^5 da identificação formam um conjunto LI, então teríamos que B também será LI e, portanto, uma base de $P_4(\mathbb{R})$. Para verificarmos se temos um conjunto LI, iremos dispor os elementos em uma matriz e proceder com o escalonamento da matriz, se não obtivermos linhas nulas no final do processo, então teremos um conjunto LI.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow_{\substack{L_5 \leftrightarrow L_5 + 2L_1 \\ L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2 \ e \ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nesse processo, as linhas não nulas da matriz na forma escalonada correspondem a vetores LI do $\mathbb{R}^5$. Logo, o conjunto de vetores analisados é LI e, portanto, B é um conjunto LI e consequetemente uma base de $P_4(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.20 *Vamos determinar uma base para o espaço*

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

ou seja, queremos determinar um subconjunto LI entre o conjunto de geradores do espaço W. Usaremos o fato de que $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ e associaremos a cada matriz geradora do espaço um vetor do $\mathbb{R}^4$, em seguida iremos verificar se esses vetores são LI, e caso não sejam, qual subconjunto deles é um conjunto LI.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & -5 & 7 \\ 1 & -7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow_{\substack{L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \ e \ L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow_{\substack{L_3 \leftrightarrow \frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow_{\substack{L_4 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_4 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + L_4}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow_{L_1 \leftrightarrow L_1 + 5L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Concluimos então que o conjunto de quatro vetores analisados é LD, porém o conjunto formado pelo primeiro e pelo último vetor é LI, ou seja, $\{(1,-5,-4,2),(1,-7,-5,1)\}$ *é LI. Portanto*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base de W.

Definição 3.3 *Seja* $T : V \to W$ *um isomorfismo. Como* T *é bijetora, então* T *(como aplicação) é inversível, ou seja, existe* $T^{-1} : W \to V$ *tal que*

$$T(T^{-1}(w)) = w, \quad \forall\, w \in W \quad e$$

$$T^{-1}(T(v)) = v, \quad \forall\, v \in V.$$

Dizemos que T^{-1} *é a* ***transformação inversa*** *de* T.

Exemplo 3.21 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x,y,z) = (x-2y, z, x+y)$. *Vamos verificar se* T *é inversível, e caso seja, iremos encontrar* T^{-1}.

Mostremos que T *é injetora. Para isso, vamos determinar o núcleo de* T, *ou seja, vamos determinar os elementos do conjunto* $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; T(x,y,z) = (0,0,0)\}$.

$$T(x,y,z) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad (x-2y, z, x+y) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $x = y = z = 0$. *Portanto* $N(T) = \{(0,0,0)\}$ *e daí segue que* T *é injetora.*

Assim, usando o TNI, temos

$$dim\mathbb{R}^3 = dimN(T) + dimIm(T)$$

$$3 = 0 + dimIm(T)$$

e segue daí que $dimIm(T) = 3 = dim\mathbb{R}^3$ *e portanto,* T *é sobrejetora. Logo* T *é bijetora e assim, inversível.*

Vamos determinar T^{-1}. *Sabemos que*

$$T^{-1}(T(x,y,z)) = (x,y,z) \quad \Rightarrow \quad T^{-1}(x-2y, z, x+y) = (x,y,z)$$

Seja (a, b, c) no domínio de T^{-1}, queremos determinar (x, y, z) em função de a, b e c tal que $T^{-1}(a, b, c) = (x, y, z)$. Pela definição da inversa temos

$$\begin{cases} a = x - 2y \\ b = z \\ c = x + y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2c + a}{3}, \; y = \frac{c - a}{3}, \; z = b$$

Portanto,

$$T^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{2c + a}{3}, \frac{c - a}{3}, b\right).$$

Proposição 3.6 *Se $T : V \to W$ é um isomorfismo, então $T^{-1} : W \to V$ também é um isomorfismo.*

Demonstração: Note, que como T é uma aplicação bijetora, então T é inversível e sua inversa é bijetora. Logo resta mostrar apenas que T^{-1} é linear. Para isso, sejam $w_1, w_2 \in W$ e $k \in \mathbb{K}$.

- $T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}(T(v_1) + T(v_2))$ para algum $v_1, v_2 \in V$. Então temos

$$T^{-1}(T(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2).$$

- $T^{-1}(kw_1) = T^{-1}(kt(v_1)) = T^{-1}(T(kv_1)) = kv_1 = kT{-}1(w_1)$.

Portanto, T^{-1} é uma transformação linear e consequentemente um isomorfismo. ∎

Como consequências diretas da proposição acima temos:

- Se $T : V \to W$ é um isomorfismo, então $dimV = dimW$.
- Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita e $dimV = dimW$, então $V \simeq W$.

Exemplo 3.22 *Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$. Vamos verificar se T é um isomorfismo, e caso seja, iremos encontrar T^{-1}.*

Mostremos que T é injetora. Para isso, vamos determinar o núcleo de T, ou seja, vamos determinar os elementos do conjunto $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$.

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad (3x, x - y, 2x + y + z) = (0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $x = y = z = 0$. Portanto $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$ e daí segue que T é injetora.

Assim, usando o TNI, temos

$$dim\mathbb{R}^3 = dimN(T) + dimIm(T)$$

$$3 = 0 + dimIm(T)$$

e segue daí que $dimIm(T) = 3 = dim\mathbb{R}^3$ *e portanto,* T *é sobrejetora. Logo* T *é bijetora e assim, inversível.*

Vamos determinar T^{-1}*. Seja* (x, y, z) *no domínio de* T^{-1}*, queremos determinar* (a, b, c) *em função de* x, y *e* z *tal que* $T^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$*.*

Sabemos que

$$T^{-1}(x,y,z) = (a,b,c) \quad \Rightarrow \quad T(T^{-1}(x,y,z)) = T(a,b,c) \quad \Rightarrow \quad T(a,b,c) = (x,y,z).$$

Pela definição da da transformação T*, temos*

$$\begin{cases} 3a = x \\ a - b = y \\ 2a + b + c = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{x}{3},\ b = \frac{x-3y}{3},\ c = z + y - x$$

Portanto,

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{x-3y}{3}, z + y - x\right).$$

3.1.3 Exercícios

(1) Verifique se cada uma das aplicações abaixo é uma transformação linear:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x+y, x-y)$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = x \cdot y$

(c) $h : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ dada por $h(A) = detA$

(d) $L : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $L(A) = tr(A)$

(e) $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $U(x,y,z) = (x^2 - 3y, 5z, 0)$

(f) $M : P_2(\mathbb{C}) \to P_3(\mathbb{C})$ dada por $M(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$

(g) $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $S(x,y,z,w) = (y, z - w, 2y + z + 2w)$

(h) $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $N(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $R(x,y) = (x, 2^y - 2^x)$

(j) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = |x|$

(k) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x, y) = x - 2y + 3$

(l) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (1 + x, y)$

(m) $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y & x + y + z \\ x + y - z & 2y - 3z \end{pmatrix}$

(n) $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(a, b, c) = a + bx + cx^2$

(o) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (xy, x)$

(2) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se existe um vetor $u \in V$ tal que $T(u) = 0$ (vetor nulo de W), podemos concluir então que $u = 0$ (vetor nulo de V)? Justifique se for verdade ou apresente um contra-exemplo se for falso.

(3) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$. Obtenha $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.

(4) Qual a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$? Obtenha $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.

(5) Qual a transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $S(1, 1, 1) = 3$, $S(0, 1, -2) = 1$ e $S(0, 0, 1) = -2$?

(6) Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear dada por $A(x, y) = (5x + 4y, -3x - 2y)$. Para quais valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ existem vetores não nulos $u \in \mathbb{R}^2$ tais que $A(u) = \lambda \cdot u$? Esses vetores u são únicos para cada λ fixado? Determine esses vetores. O que vocÊ pode concluir dos vetores "associados" a cada λ?

(7) Obtenha o núcleo, a imagem e suas respectivas dimensões para cada uma das aplicações do Exercício 1 que forem transformações lineares. Verifique o Teorema do Núcleo e da Imagem em cada caso.

(8) Obtenha o núcleo e a imagem da transformação linear derivação $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ dado por $D(p(x)) = p'(x)$.

(9) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$. Determine uma base do núcleo de T. Qual a dimensão da imagem de T? A imagem de T é todo o $\mathbb{R}^3$? Justifique.

(10) Pode existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ cuja imagem é todo $\mathbb{R}^5$? Justifique e tente generalizar cada resultado.

(11) Pode existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$? Justifique e tente generalizar cada resultado.

(12) Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Mostre que $B' = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ gera a $Im(T)$, ou seja, qualquer vetor da imagem de T é uma combinação linear dos vetores de B'.

(13) Descreva explicitamente uma transformação linear $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que sua imagem seja o espaço gerado pelos vetores $u = (2i, 1, -3)$ e $v = (0, -i, 1 + i)$.

(14) Descreva explicitamente uma transformação linear $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e cuja imagem seja a reta $y = 3x$.

(15) Verifique quais das transformações lineares do Exercício 1 são injetoras e quais são sobrejetoras.

(16) Dados $T : U \to V$ transformação linear injetora e $u_1, u_2, \ldots u_k$ vetores LI em U, mostre que o conjunto $\{T(u_1, T(u_2), \ldots, T(u_k)\}$ é LI.

(17) Dê, quando possível, exemplos de transformações lineares satisfazendo as condições dos itens abaixo. Quando não for possível, justifique.

   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetora.
   (b) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $N(S) = \{(0, 0, 0)\}$.
   (c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $Im(L) = \{(0, 0)\}$.
   (d) $M : M_2(\mathbb{C}) \to P_3(\mathbb{R})$ isomorfismo.
   (e) $H : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ isomorfismo.

(18) Seja T a transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$. Verifique se T é invertível e, em caso afirmativo, determine T^{-1}.

(19) Seja $P : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ a transformação linear tal que $P(1, 0, 0) = (1, 0, i)$, $P(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$, $P(0, 0, 1) = (i, 0, 1)$. Verifique se P é um isomorfismo.

(20) Seja $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(p(x)) = (p(0), p(1))$. Mostre que T é injetiva.

(21) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear para a qual existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(v) \neq 0$, determine $dimN(T)$.

3.2 Transformações lineares e matrizes

Nosso objetivo nessa seção é associar matrizes a transformações lineares. Veremos que a cada escolha de bases para o domínio e contradomínio de uma transformação linear teremos uma matriz associada à transformação.

Inicialmente, vamos observar que dada uma matriz podemos construir uma transformação linear a partir dela. Considere por exemplo a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e defina $T : M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 1}(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = A \cdot X$.

Observe que, se considerarmos uma base β de $\mathbb{R}^3$, dado um vetor $v \in R^3$ podemos considerar a matriz das coordenadas de v em relação à base β, $[v]_\beta$, como sendo uma matriz de $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Assim, $T([v]_\beta) = A \cdot [v]_\beta$. Vamos considerar os isomorfismos existentes $M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ e $M_{2\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$ e alguns abusos de notação para reescrever a transformação T como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(v) = A \cdot v^t$. Estamos considerando, neste caso, $v = [v]_\beta$ e $v^t = [v]_\beta$, ou seja, nossa definição depende da base β. Se β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$, então $T(x, y, z) = (2x + z, -y + z)$.

Vejamos, de maneira geral, como construir uma matriz que represente uma transformação linear dadas bases ordenadas do domínio e contradomínio da transformação.

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases ordenadas de V e W. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Nosso objetivo é determinar uma matriz A, tal que

$$[T(v)]_\beta = A \cdot [v]_\alpha$$

para todo $v \in V$.

Dado $v \in V$, então

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

e

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Daí

$$T(v) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_nT(v_n). \tag{3.1}$$

Como $T(v_i) \in W$ para todo i, temos

$$\begin{cases} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{cases}$$

Substituindo em (3.1), obtemos

$$T(v) = a_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + a_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m) \quad \Rightarrow$$

$$T(v) = (a_1a_{11} + a_2a_{12} + \cdots + a_na_{1n})w_1 + \cdots + (a_1a_{m1} + a_2a_{m2} + \cdots + a_na_{mn})w_m \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
[T(v)]_\beta &= \begin{pmatrix} a_1a_{11} + a_2a_{12} + \cdots + a_na_{1n} \\ a_1a_{21} + a_2a_{22} + \cdots + a_na_{2n} \\ \vdots \\ a_1a_{m1} + a_2a_{m2} + \cdots + a_na_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= ([T(v_1)]_\beta \; [T(v_2)]_\beta \; \ldots \; [T(v_n)]_\beta) \cdot [v]_\alpha \\
&= A \cdot [v]_\alpha
\end{aligned}$$

A matriz A é a matriz que representa T em relação às bases α e β e a denotamos por $[T]_\beta^\alpha$. Portanto, temos

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha \cdot [v]_\alpha.$$

Observação 3.2 *Se $I : V \to V$ é a transformação identidade, então $[I]_\beta^\alpha$ é a matriz mudança de base vista em 2.4.3.*

Exemplo 3.23 *Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$T(x, y) = (x + y, y, y - x)$$

e β, β' as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Vamos deteminar $[T]_{\beta'}^\beta$ a matriz da transformação T em relação às bases β e β'.

Primeiro precisamos determinar as imagens por T dos vetores da base β e em seguida, determinar as coordenadas dessas imagens em relação à base β'.

$$T(1, 0) = (1, 0, -1) = \mathbf{1}(1, 0, 0) + \mathbf{0}(0, 1, 0) + (-\mathbf{1})(0, 0, 1)$$

$$T(0, 1) = (1, 1, 1) = \mathbf{1}(1, 0, 0) + \mathbf{1}(0, 1, 0) + \mathbf{1}(0, 0, 1)$$

Portanto,

$$[T]_{\beta'}^\beta = ([T(1, 0)]_{\beta'} \; [T(0, 1)]_{\beta'}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que, com a matriz obtida podemos obter as coordenadas da imagem de qualquer vetor em $\mathbb{R}^2$ pela transformação T em relação a base β'. Por exemplo, vamos considerar o vetor $(4,1) \in \mathbb{R}^2$. Temos que

$$\begin{aligned}
[T(4,1)]_{\beta'} &= [T]^{\beta}_{\beta'} \cdot [(4,1)]_{\beta} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Assim,

$$T(4,1) = 5(1,0,0) + 1(0,1,0) + (-3)(0,0,1) = (5,1,-3).$$

Exemplo 3.24 *Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$T(x,y,z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$$

e $\alpha = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$, $\beta = \{(2,1),(5,3)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Vamos deteminar $[T]^{\alpha}_{\beta}$ a matriz da transformação T em relação às bases β e β'.

Primeiro precisamos determinar as imagens por T dos vetores da base α e em seguida, determinar as coordenadas dessas imagens em relação à base β.

- $$T(1,1,1) = (2,2) = a(2,1) + b(5,3)$$

  Vamos determinar os valores de a e b. Observe que da última igualdade temos

  $$\begin{cases} 2a + 5b = 2 \\ a + 3b = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = -4,\ b = 2.$$

  Logo, $[T(1,1,1)]_{\beta} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- $$T(0,1,1) = (0,-1) = a(2,1) + b(5,3)$$

  Vamos determinar os valores de a e b. Observe que da última igualdade temos

  $$\begin{cases} 2a + 5b = 0 \\ a + 3b = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 5,\ b = -2.$$

  Logo, $[T(0,1,1)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- $$T(0,0,1) = (1,-2) = a(2,1) + b(5,3)$$

  Vamos determinar os valores de a e b. Observe que da última igualdade temos

  $$\begin{cases} 2a + 5b = 1 \\ a + 3b = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 13,\ b = -5.$$

  Logo, $[T(0,0,1)]_\beta = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Portanto,

$$[T]_\beta^\alpha = ([T(1,1,1)]_\beta \ [T(0,1,1)]_\beta \ [T(0,0,1)]_\beta) = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Quando estivermos considerando α e β, respectivamente, as bases canônicas do domínio e do contradomínio, escreveremos apenas $[T]$ ao invés de $[T]_\beta^\alpha$.

Exemplo 3.25 *Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$T(x,y) = (7x - 4y, -4x + y).$$

(a) Vamos obter $[T]$.

(b) Vamos determinar $[T]_\beta^\beta$, onde $\beta = \{(3,6),(-2,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Solução:

(a) Primeiro precisamos determinar as imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$ em seguida, determinar as coordenadas dessas imagens em relação à base canônica.

$$T(1,0) = (7,-4) = \mathbf{7}(1,0) + (-\mathbf{4})(0,1)$$

$$T(0,1) = (-4,1) = (-\mathbf{4})(1,0,0) + \mathbf{1}(0,1)$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Primeiro precisamos determinar as imagens por T dos vetores da base β e em seguida, determinar as coordenadas dessas imagens em relação à base β.

- $$T(3,6) = (-3,-6) = a(3,6) + b(-2,1)$$

  Vamos determinar os valores de a e b. Observe que da última igualdade temos

  $$\begin{cases} 3a - 2b = -3 \\ 6a + b = -6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = -1,\ b = 0.$$

  Logo, $[T(3,6)]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$T(-2,1) = (-18,9) = a(3,6) + b(-2,1)$$

  Vamos determinar os valores de a e b. Observe que da última igualdade temos

  $$\begin{cases} 3a - 2b = -18 \\ 6a + b = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 0,\ b = 9.$$

  Logo, $[T(-2,1)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Portanto,

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.26 *Considere a transformação linear $D : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada pela derivada primeira e as bases ordenadas $\alpha = \{1, x, x^2\}$ e $\beta = \{1+x, 1-x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.*

(a) Vamos determinar $[D]_\alpha^\beta$.

(b) Vamos determinar $[D]_\beta^\alpha$.

Solução:

(a) Primeiro precisamos determinar as imagens por D dos vetores da base β e em seguida, determinar as coordenadas dessas imagens em relação à base α.

$$D(1+x) = 1 = \mathbf{1}\cdot 1 + \mathbf{0}\cdot x + \mathbf{0}\cdot x^2$$

$$D(1-x) = -1 = -\mathbf{1}\cdot 1 + \mathbf{0}\cdot x + \mathbf{0}\cdot x^2$$

$$D(x^2) = 2x = \mathbf{0}\cdot 1 + \mathbf{2}\cdot x + \mathbf{0}\cdot x^2$$

Portanto,

$$[D]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) *Primeiro precisamos determinar as imagens por D dos vetores da base α e em seguida, determinar as coordenadas dessas imagens em relação à base β.*

- $$D(1) = 0 = a \cdot (1+x) + b \cdot (1-x) + c \cdot x^2$$

  Logo, teremos
  $$a = b = c = 0$$
  e, $[D(1)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$D(x) = 1 = a \cdot (1+x) + b \cdot (1-x) + c \cdot x^2$$

  Vamos determinar os valores de a, b e c. Observe que da última igualdade temos
  $$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \\ c=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = 0.$$

  Logo, $[D(x)]_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$D(x^2) = 2x = a \cdot (1+x) + b \cdot (1-x) + c \cdot x^2$$

  Vamos determinar os valores de a, b e c. Observe que da última igualdade temos
  $$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=2 \\ c=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 1,\ b = -1,\ c = 0.$$

  Logo, $[D(x^2)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Portanto,
$$[D]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.27 *Considere a transformação linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por*
$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d, b+c).$$

Vamos deteminar $[T]^{\beta}_{\alpha}$*, onde* $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ *e* $\alpha = \{(-1,0),(1,2)\}$ *são bases de* $M_2(\mathbb{R})$ *e* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente.*

Primeiro precisamos determinar as imagens por T *dos vetores da base* β *e em seguida, determinar as coordenadas dessas imagens em relação à base* α*.*

- $$T\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (2,1) = a(-1,0) + b(1,2)$$

  Vamos determinar os valores de a *e* b*. Observe que da última igualdade temos*

  $$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2b = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{3}{2},\ b = \frac{1}{2}.$$

  Logo, $\left[T\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]_{\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- $$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (2,-1) = a(-1,0) + b(1,2)$$

  Vamos determinar os valores de a *e* b*. Observe que da última igualdade temos*

  $$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2b = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{5}{2},\ b = -\frac{1}{2}.$$

  Logo, $\left[T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)\right]_{\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- $$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (1,2) = a(-1,0) + b(1,2)$$

  Vamos determinar os valores de a *e* b*. Observe que da última igualdade temos*

  $$\begin{cases} -a + b = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 0,\ b = 1.$$

  Logo, $\left[T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\right]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $$T\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = (2,0) = a(-1,0) + b(1,2)$$

Vamos determinar os valores de a e b. Observe que da última igualdade temos

$$\begin{cases} -a+b=2 \\ 2b=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a=-2,\ b=0.$$

Logo, $\left[T\left(\left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}\right)\right)\right]_\alpha = \left(\begin{array}{c} -2 \\ 0 \end{array}\right)$.

Portanto,

$$[T]_\alpha^\beta = \left(\begin{array}{cccc} -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Observação 3.3 *Se $T: V \to V$ é uma transformação linear e α e β são bases e V, a relação que existe entre as matrizes $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ é dada por*

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta.$$

Como $[I]_\alpha^\beta = ([I]_\beta^\alpha)^{-1}$, temos

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot ([I]_\beta^\alpha)^{-1}$$

e

$$[T]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\beta \cdot [T]_\beta^\beta \cdot ([I]_\alpha^\beta)^{-1}.$$

Definição 3.4 *Duas matrizes A e B são **semelhantes** se existe uma matriz P inversível tal que*

$$B = PAP^{-1}.$$

3.2.1 Composição de transformações lineares

Toda transformação linear é, em particular, uma aplicação. Logo faz sentido falarmos em composição de transformações. Naturalmente, dadas as transformações lineares $T: V \to W$ e $S: W \to Z$ podemos definir a aplicação $S \circ T: V \to Z$ dada por

$$S \circ T(v) = S(T(v)), \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Proposição 3.7 *Dadas as transformações lineares $T: V \to W$ e $S: W \to Z$, a composição $S \circ T$ dessas transformações é uma transformação linear.*

Demonstração: De fato, sejam $u, v \in V$ e $k \in \mathbb{K}$, como S e T são transformações lineares, temos

$$S \circ T(u+v) = S(T(u+v)) = S(T(u)+T(v)) = S(T(u)) + S(T(v)) = S \circ T(u) + S \circ T(v)$$

e

$$S \circ T(ku) = S(T(ku)) = S(kT(u)) = k(S(T(u))) = k(S \circ T(u)).$$

■

Exemplo 3.28 *Sejam $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $R(x, y) = (x, x - y)$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $S(x, y) = 2y, x)$ duas transformações lineares.*

Temos bem definidas $R \circ S$ e $S \circ R$ e estas são dadas por

$$R \circ S(x, y) = R(S(x, y)) = R(2y, x) = (2y, 2y - x),$$

$$S \circ R(x, y) = S(R(x, y)) = S(x, x - y) = (2(x - y), x) = (2x - 2y, x).$$

Assim como vimos no exemplo anterior, de maneira geral, $S \circ R \neq R \circ S$.

Proposição 3.8 *Sejam $T : V \to W$ e $S : W \to Z$ transformações lineares e α, β, γ bases de V, W e Z, respectivamente. Então*

$$[S \circ T]^{\alpha}_{\gamma} = [S]^{\beta}_{\gamma} \cdot [T]^{\alpha}_{\beta}.$$

Em particular, suponha que $T : V \to W$ seja um isomorfismo. Ou seja, existe a transformação inversa T^{-1} e ainda,

$$T \circ T^{-1}(w) = w, \quad \text{para todo} \quad w \in W,$$

$$T^{-1} \circ T(v) = v, \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Logo, as compostas $T \circ T^{-1}$ e $T^{-1} \circ T$ coincidem com as transformações identidades de W e V, respectivamente. Assim, as matrizes dessas transformações nas bases canônicas serão

$$[T \circ T^{-1}] = [I_W] = I$$

e

$$[T^{-1} \circ T] = [I_V] = I,$$

onde I é a matriz identidade. Utilizando isso e a proposição anterior, temos

$$[T] \cdot [T^{-1}] = I,$$

e concluimos disso que

$$[T^{-1}] = [T]^{-1},$$

isto é a matriz da transformação inversa de T nas bases canônicas é a inversa da matriz de T nas bases canônicas.

3.2.2 Exercícios

(1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$. Encontre a matriz que representa T na base canônica do $\mathbb{R}^2$.

(2) Sejam $\alpha = \{(1, 1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 0)\}$, bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Calcule $[T]^{\alpha}_{\beta}$, onde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$.

(3) Sejam $\alpha = \{(1, 1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 0)\}$, bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Dadas duas trasnformações lineares $T, T' : V \to W$ e bases α e β de V e W, respectivamente, mostre que se $[T]^{\alpha}_{\beta} = [T']^{\alpha}_{\beta}$, então $T = T'$.

(5) Seja D o operador derivada sobre o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual a 3, $P_3(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que D é um operador linear.

(b) Encontre as matrizes $[D]^{\beta}_{\alpha}$, $[D]^{\alpha}_{\alpha}$, $[D]^{\beta}_{\beta}$ e $[D]^{\alpha}_{\beta}$, onde

$$\alpha = \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{e} \quad \beta = \left\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}\right\}$$

são bases de $P_3(\mathbb{R})$.

(6) Dado o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, y - x, x - z)$, encontre $[T]^{\alpha}_{\beta}$, onde α é a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$.

(7) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a multiplicação pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que $N(T)$ é uma reta que passa pela origem e encontre as equações paramétricas desta reta.

(b) Mostre que $Im(T)$ é um plano que passa pela origem e encontre a equação cartesiana deste plano.

(8) Dado o operador linear $T(x,y,z) = (x - 2y + z, -x + 4y - 2z, x)$ em $\mathbb{R}^3$, e a base $\alpha = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$, encontre uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(9) Seja $P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear $T(p(x)) = p(2x+1)$. Encontre $[T]^\beta_\beta$, onde $\beta = \{1, x, x^2\}$.

(10) Seja $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de um espaço vetorial V. Encontre a matriz $[T]^\alpha_\alpha$ da transformação linear $T : V \to V$ definida por

$$T(v_1) = v_2, \qquad T(v_2) = v_3, \qquad T(v_3) = v_4, \qquad T(v_4) = v_1.$$

(11) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

onde α e β são as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $M_2(\mathbb{R})$, respectivamente.

(a) Determine os vetores $v \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(v) = I_2$.

(b) Determine $T(3, -1)$.

(12) Considere as transformações lineares

$$T : \mathbb{R}^{n+1} \to P_n(\mathbb{R}), \qquad T(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

e

$$S : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad S(p(x)) = (p(0), p(1), \ldots, p(n)).$$

Determine as matrizes de $S \circ T$ e $T \circ S$ nas bases canônicas de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $P_n(\mathbb{R})$.

(13) Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a transformação linear dada por

$$T(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx.$$

Determine as matrizes de T com relação as bases:

(a) $\alpha = \{1, x, x^2\}$ e $\beta = \{1\}$.

(b) $\alpha = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ e $\beta = \{-2\}$.

(14) Sejam α e β as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} k & k \\ k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix},$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

(a) Para que valores de k, T é injetiva?

(b) Para que valores de k, T é sobrejetiva?

(c) No caso em que T não é injetiva, determine $N(T)$.

(15) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a tarsnformação linear tal que

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

onde α e β são as bases canônicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determine $T^{-1}(1, 0)$.

CAPÍTULO 4

DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

4.1 Operadores lineares

Toda transformação linear de um espaço vetorial V nele próprio, isto é, da forma $T : V \to V$ é chamado **operador linear**.

Vimos no capítulo anterior que, sob certas condições, é possível definir a composição de transformações lineares. A partir dessa definição, podemos definir a potenciação de um operador linear. Se $T : V \to V$ é um operador linear e $n \in \mathbb{N}$, definimos a n**-ésima potência** de T, denotando por T^n, como a função $T^n : V \to V$ dada por

$$T^1 = T \quad \text{e} \quad T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T, \quad \text{se} \quad n > 2.$$

Para $n = 0$, definimos $T^0 = I$ (transformação identidade). Daí, se T é um isomorfismo, a transformação linear $T^{-n} : V \to V$ é definida por $T^{-n} = (T^{-1})^n$.

A partir da definição acima, temos alguns tipos especiais de operadores lineares:

Definição 4.1 *Dado $T : V \to V$ um operador linear, dizemos que:*

*(i) T é um operador **idempotente** ou **projeção** se $T^2 = T$.*

*(ii) T é um operador **auto-reflexivo** se $T^2 = I$.*

*(iii) T é um operador **nilpotente** se $T^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

4.1.1 Autovalores e autovetores

A partir de agora, a menos que mencionemos o contrário, estamos considerando somente espaços vetoriais reais.

Definição 4.2 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um número real λ será dito um* ***autovalor*** *de T se existir um vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$. O vetor v é chamado de* ***autovetor*** *ou* ***vetor característico*** *de T associado a λ.*

É claro que, se v é um autovetor de T associado a um autovalor λ, então todo múltiplo escalar de v é também um autovetor de T associado a λ. Além disso, temos a seguinte definição:

Definição 4.3 *O subespaço*

$$V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

é chamado ***autoespaço*** *de T associado a λ.*

Note que, o vetor nulo não é um autovetor, mas está no conjunto V_λ. O conjunto (subespaço) V_λ é formado pelo vetor nulo e todos os autovetores de T associados a λ.

Exemplo 4.1 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (2x + 2y, y)$. Vamos determinar se existem autovalores e autovetores de T.*

Seja $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Devemos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$T(v) = \lambda(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad (2x + 2y, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}$$

Vamos dividir em casos para resolver esse sistema.

- $y \neq 0$
  $y = \lambda y \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$
  $2x + 2y = x \quad \Rightarrow \quad x = -2y$

  Logo, obtemos neste caso o autovalor $\lambda = 1$ e os autovetores associados $(-2y, y), y \neq 0$. Observe que os autovetores estão sob a reta $y = -\frac{1}{2}x$.

- $y = 0$ *(portanto, $x \neq 0$)*
  $2x + 2y = \lambda x \quad \Rightarrow \quad 2x = \lambda x \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$

  Logo, obtemos neste caso o autovalor $\lambda = 2$ e os autovetores associados $(x, 0), x \neq 0$. Observe que os autovetores estão sob a reta $y = 0$.

Exemplo 4.2 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (-y, x)$. Vamos determinar se existem autovalores e autovetores de T.*

Seja $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Devemos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$T(v) = \lambda(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad (-y, x) = (\lambda x, \lambda y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y = \lambda x \\ \;\;\, x = \lambda y \end{cases}$$

Substituindo x na primeira equação por λy, temos

$$\lambda(\lambda y) = -y \quad \Rightarrow \quad y(\lambda^2 + 1) = 0,$$

como $\lambda^2 + 1 > 0$, temos $y = 0$ e consequentemente $x = 0$. Nossa condição inicial é $(x, y) \neq (0, 0)$, logo T não possui autovalores e autovetores.

Proposição 4.1 *Seja $T : V \to V$ um operador linear e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de T. Se $v_1, v_2, \dots, v_r$ são autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, respectivamente, então $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é linearmente independente.*

Corolário 4.1 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se $dimV = n$ e T possui n autovalores distintos, então V possui uma base formada por autovetores de T.*

Esses dois últimos resultados serão importantes para obtermos uma representação matricial mais simples de um operador linear. Em linhas gerais, estaremos procurando por bases formadas por autovetores.

A fim de facilitarmos os cálculos para obtenção de autovalores e autovetores traremos as definições vistas para o conjunto de matrizes, já que podemos associar matrizes a operadores lineares.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Um **autovalor** de A é um autovalor λ da transformação $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, onde A é a matriz de T_A na base canônica do $\mathbb{R}^n$. E um **autovetor** de A é um vetor não nulo v que é autovetor associado a λ pela transformação T_A. Isto é, v é autovetor de A associado a um autovalor λ se, e somente se,

$$T_A(v) = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad Av - \lambda v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)v = 0,$$

onde I é a matriz identidade de mesma ordem que A. Observe que $(A - \lambda I)v = 0$ é um sistema homogêneo de n equações e n incógnitas. Como estamos procurando por autovetores, estamos procurando soluções não nulas desse sistema, isto é, $v \neq 0$. Por se tratar de um sistema homogêneo, ele sempre terá solução e só terá solução não nula se $det(A - \lambda I) = 0$. Usaremos este fato, para determinar autovalores e autovetores, quando existirem.

Exemplo 4.3 *Vamos determinar, caso existam, os autovalores e autovetores da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Associamos a essa matriz a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(v) = Av$. *Um vetor não nulo* $v = (x, y, z)$ *é autovetor associado a* λ *se, e somente se,*

$$T_A(v) = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_3)v = 0.$$

Como vimos, estamos interessados nos valores de λ *tais que* $det(A - \lambda I_3) = 0$. *Ou seja,*

$$det\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Calculando o determinante, temos

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0.$$

Assim, obtemos os valores de λ *encontrando as raízes do polinômio* $p(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$. *Os autovalores serão* $\lambda = 3$ *e* $\lambda' = 2$ *e os autoespaços associados serão*

$$V_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \; T_A(v) = 2v\},$$
$$V_3 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \; T_A(v) = 3v\}.$$

- $\lambda = 2$
  Vamos determinar os autovetores associados ao autovalor 2. Para isso, basta voltarmos ao sistema $(A - \lambda I_3)v = 0$ *e substituirmos* λ *por 2. Daí temos o seguinte*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

  Resolvendo o sistema, obtemos que os autovetores procurados são da forma $v = (0, 0, z), z \neq 0$ *e portanto*

$$V_2 = \langle (0, 0, 1) \rangle.$$

- $\lambda = 3$
  Vamos determinar os autovetores associados ao autovalor 2. Basta voltarmos ao sistema $(A - \lambda I_3)v = 0$ *e substituirmos* λ *por 3. Daí temos o seguinte*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$$

  Resolvendo o sistema, obtemos que os autovetores procurados são da forma $v = (-2y, y, y), y \neq 0$ *e portanto*

$$V_3 = \langle (-2, 1, 1) \rangle.$$

4.1.2 Polinômio característico

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz $(A - \lambda I_n)$, onde λ é uma indeterminada, é chamada **matriz característica** de A. O determinante dessa matriz é um polinômio em λ chamado **polinômio caracterísico** da matriz A e denotado por $p_A(\lambda)$. Se $T : V \to V$ é um operador linear, o **polinômio característico** de T é o polinômio característico da matriz $[T]$ (a matriz da transformação T na base canônica de V) e é denotado por $p_T(\lambda)$.

Observação 4.1 *Se α é uma base qualquer de V, então*

$$det([T]_\alpha^\alpha - \lambda I) = det([T] - \lambda I).$$

Logo,

$$p_T(\lambda) = det([T] - \lambda I).$$

Note que, os autovalores de T são as raízes de $p_T(\lambda)$.

Exemplo 4.4 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$. Vamos determinar o polinômio característico de T.*

$$p_T(\lambda) = det([T] - \lambda I_3)$$

Para calcularmos $[T]$, precisamos determinar as imagens diretas dos elemento da base canônica de $\mathbb{R}^3$ pela transformação T. Temos

$$T(1, 0, 0) = (1, 1, 2); \qquad T(0, 1, 0) = (1, -1, 1); \qquad T(0, 0, 1) = (0, 2, -1).$$

Daí,

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e então

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= det([T] - \lambda I_3) \\ &= det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1+\lambda)(2+\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

Sabemos que os autovalores de T são as raízes do polinômio característico, logo para calcularmos os autovalores temos

$$p_T(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+\lambda)(2+\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1 \quad ou \quad \lambda = -2 \quad ou \quad \lambda = 2.$$

- $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2z \quad e \quad y = 4z.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$ são da forma $v = (-2z, 4z, z)$ com $z \neq 0$.

- $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow L_1 - 3L_2}_{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z \quad e \quad y = -3z.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -2$ são da forma $v = (z, -3z, z)$ com $z \neq 0$.

- $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2}_{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_1}_{L_3 \leftrightarrow \frac{1}{7}L_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z \quad e \quad y = z.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$ são da forma $v = (z, z, z)$ com $z \neq 0$.

Vamos escolher um conjunto formado por um autovetor associado a cada um dos autovalores, por exemplo, o conjunto $B = \{(-2, 4, 1), (1, -3, 1), (1, 1, 1)\}$ é formado por autovetores associados, respectivamente, aos autovalores $-1, -2$ e 2. Como esses autovalores são distintos, B é um conjunto LI e por ser composto por 3 vetores (dimensão do $\mathbb{R}^3$), então B é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Além disso, temos

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.1.3 Diagonalização de operadores

Lembramos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n é **diagonal** se $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Definição 4.4 *Um operador linear $T : V \to V$ é* ***diagonalizável*** *quando é possível obter uma base α de V tal que $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz diagonal.*

Seja $T : V \to V$ um operador linear e suponha que exista uma base $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V tal que

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

Pela definição de matriz da transformação, temos:

$$\begin{gathered} T(v_1) = k_1 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 0 v_n \\ T(v_2) = 0 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + 0 v_n \\ \vdots \\ T(v_n) = 0 v_1 + 0 v_2 + \cdots + k_n v_n \end{gathered}$$

Logo $T(v_i) = k_i v_i$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ou seja, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são autovetores associados aos autovalores $k_1, k_2, \ldots, k_n$, respectivamente.

Proposição 4.2 *Um operador linear $T : V \to V$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base de V formada por autovetores.*

Exemplo 4.5 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear dado por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$. Vamos verificar se T é diagonalizável.*

Temos

$$T(1, 0) = (-3, -1),$$
$$T(0, 1) = (4, 2).$$

Logo, a matriz de T na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então o polinômio característico de T será

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= det([T] - \lambda I_2) \\ &= det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 \end{aligned}$$

Daí, os autovalores de T são dados por

$$p_T(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \quad ou \quad \lambda = -2.$$

Como o operador possui dois autovalores distintos e seu domínio tem dimensão dois, segue do Corolário 4.1 e da Proposição 4.2 que T é diagonalizável. Vamos determinar a seguir, uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T.

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow^{L_1 \leftrightarrow L_1 - 4L_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x = y.$$

  Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$ são da forma $v = (x, x)$ com $x \neq 0$.

- $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + 4y = 0 \Rightarrow x = 4y.$$

  Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -2$ são da forma $v = (4y, y)$ com $y \neq 0$.

Segue que $\alpha = \{(1,1), (4,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4.6 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que*

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar se T é diagonalizável. O polinômio característico de T será

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= det([T] - \lambda I_3) \\ &= det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(-1-\lambda) \end{aligned}$$

Daí, os autovalores de T são dados por

$$p_T(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 3 \quad ou \quad \lambda = -1.$$

- $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3y - 4z = 0 \\ 5z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \quad e \quad y = 0.$$

  Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são da forma $v = (x, 0, 0)$ com $x \neq 0$.

- $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y - 4z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{5}{4}z \quad e \quad x = \frac{1}{16}z.$$

  Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$ são da forma $v = (\frac{z}{16}, -\frac{5}{4}z, z)$ com $z \neq 0$.

Logo T não é diagonalizável, uma vez que não é possível obtermos uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

Exemplo 4.7 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que*

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar se T é diagonalizável. O polinômio característico de T será

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= det([T] - \lambda I_3) \\ &= det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(-1-\lambda) \end{aligned}$$

Daí, os autovalores de T são dados por

$$p_T(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 3 \quad ou \quad \lambda = -1.$$

- $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4z = 0 \\ 5z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0.$$

  Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são da forma $v = (x, y, 0)$ com $x^2 + y^2 \neq 0$.

- $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{5}{4}z \quad e \quad x = z.$$

  Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$ são da forma $v = (z, -\frac{5}{4}z, z)$ com $z \neq 0$.

Seja $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(4,-5,4)\}$. *Observe que* α *é composto de autovetores de* T *associados, respectivamente, aos autovalores* $3, 3, -1$. *Esse conjunto é LI, pois, sse* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *são tais que*

$$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(4,-5,4) = (0,0,0)$$

então conseguimos mostrar que $a = b = c = 0$. *Logo* α *é uma base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovetores. Portanto* T *é diagonalizável e*

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal é chamada de 1ª **forma canônica**. Outras formas são estudadas em álgebra linear, como por exemplo as formas de Jordan e Racional.

4.1.4 Exercícios

(1) Seja $T : V \to V$ um operador linear, com $dimV = n$ e, para algum $v \in V$, tem-se

$$T^n(v) = 0 \quad \text{e} \quad T^{n-1}(v) \neq 0.$$

Mostre que

$$\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$$

é uma base de V.

(2) Um operador linear $T : V \to V$ é dito **nilpotente** se existe um inteiro positivo n tal que $T^n = 0$ é a transformação nula. O menor inteiro positivo n tal que $T^n = 0$ e $T^{n-1} \neq 0$ é chamado **índice de nilpotência** de T. Se T é um operador não nulo e nilppotente, determine todos os possíveis autovalores de T.

(3) Um operador linear $T : V \to V$ é dito **idempotente** se $T^2 = T$. Encontre os possíveis valores para os autovalores de T.

(4) Mostre que, se T é um isomorfismo, então λ é autovalor de T se, e somente se, $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de T^{-1}.

(5) Seja $T : V \to V$ um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T. Mostre que o autoespaço V_λ de T associado a λ é um subespaço vetorial de V.

(6) Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$.

  (a) Encontre a matriz A que representa T na base canônica do $\mathbb{R}^2$.

  (b) Encontre os autovalores λ_1, λ_2 de A e seus respectivos autovetores associados v_1, v_2.

(c) Encontre a matriz que representa T na base $\{v_1, v_2\}$, formada pelos autovetores encontrados acima.

(7) Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Mostre que:

(a) Os autovetores v_1 e v_2 correspondentes são LI.

(b) $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são LI.

(8) Determine os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - y, x)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$.

(c) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$.

(d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$.

(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + 2y, x)$.

(f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$.

(g) $D : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, onde D é o operador derivada.

(9) Determine os autovalores e os autovetores dos seguintes operadores cujas matrizes na base canônica são:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(10) Determine $T(x, y, z)$ sabendo que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um operador linear com autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, dados por $\{(x, x + y, y) : \; x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\{(0, x, 2x) : \; x \in \mathbb{R}\}$, respectivamente.

(11) Os autovalores de um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$, sendo $v_1 = (1, 1, 1,)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$ os respectivos autovetores associados. Determine $T(x, y, z)$.

(12) Seja T um operador cuja matriz na base canônica é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine o polinômio característico de T.

(b) Determine os autovalores de T.

(c) Determine os autovetores de T.

(13) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

onde $\alpha = \{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Verifique se T é diagonalizável.

(14) **Verdadeiro ou falso:** se T é diagonalizável e T é isomorfismo, então T^{-1} é diagonalizável.

(15) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x,y) = (2x-2y, -x+3y)$. Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz do operador T é diagonal.

(16) Sejam S e T operadores lineares tais que $S \circ T = T \circ S$. Seja λ um autovalor de T e seja W o autoespaço de T associado a λ. Mostre que W é invariante sob S, isto é, $S(W) \subset W$.

(17) Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então A e A^t têm os mesmos autovalores.

(18) Quais dos operadores lineares do Exercício 8 são diagonalizáveis? Para os que forem diagonalizáveis encontre sua matriz na forma diagonal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.