UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Análise Matemática*
Prof. *Victor Martins*

Prova 5 - 09/07/2019

(Questões sem justificativas não serão consideradas, portanto apresente as justificativas para cada solução.)

Nome:____Matrícula:__________

ATENÇÃO: Resolver obrigatoriamente a questão 5 e mais duas questões.

Questão 1:

(a) *(0,5 pontos)* Defina função contínua em um ponto a do seu domínio;

(b) *(1,2 pontos)* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax, & \text{se} \quad x \leq 1, \\ kx^2, & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Que relação deve existir entre k e a para que f seja contínua no ponto 1?

(c) *(1,3 pontos)* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Determine os pontos onde f é contínua e onde ela é descontínua.

Questão 2:

(a) *(0,5 pontos)* Dê a definição qualitativa de continuidade para uma função f em um ponto a do domínio de f;

(b) *(2,5 pontos)* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 4x - 6, & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Determine os pontos de continuidade de f.

Questão 3:

(a) *(0,6 pontos)* Defina continuidade uniforme de uma função f e função Lipschitziana;

(b) *(1,2 pontos)* Mostre que se f é Lipschitziana então f é uniformemente contínua;

(c) *(1,2 pontos)* Seja $f : (1, 3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Mostre que f é uniformemente contínua.

Questão 4:

(a) *(0,5 pontos)* Enucie o Teorema de Bolzano e o Teorema do Valor Intermediário;

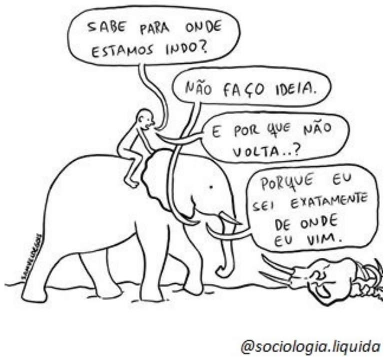
(b) *(1,5 pontos)* Mostre que é não vazio o conjunto solução da equação $\dfrac{x^2 - 4x^7 + 1}{\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt[3]{x}$;

(c) *(1,0 ponto)* A função contínua $f : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \in (-\infty, 1) \\ x^2 + 1, & \text{se} \quad x \in (1, \infty), \end{cases}$$

satisfaz $f(0) < \frac{3}{2} < f(2)$, mas não existe c no domínio de f tal que $f(c) = \frac{3}{2}$. Por que esse exemplo não contraria o Teorema do Valor Intermediário?

Questão 5: *(6,0 pontos)* Coloque **V** para as afirmações verdadeiras e **F** para as falsas. Prove ou dê contra-exemplos em cada uma das afirmações.



(a) ( ) Se $A, B \subset \mathbb{R}$ então $\text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B$;

(b) ( ) Se $A \subset \mathbb{R}$, então $\overline{A} \subset A'$;

(c) ( ) Toda sequência limitada é convergente;

(d) ( ) A sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ definida recursivamente por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + 2)$ é convergente;

(e) ( ) Se $A \subset \mathbb{R}$, então $A' \subset \overline{A}$;

(f) ( ) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então $\lim a_n = 0$;

(g) ( ) Se f é contínua, então f é uniformemente contínua;

(h) ( ) Todo conjunto finito possui máximo;

(i) ( ) Se f é contínua, então f é Lipschitziana;

(j) ( ) $2^n < n!$ para todo $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

BOA PROVA!