



Disciplina: *Álgebra Linear II*  
Prof. *Victor Martins*

### Lista 3: Funcionais lineares

- (1) Sejam  $u_1 = (1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (0, 1, -2)$ ,  $u_3 = (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ .
- (a) Seja  $f \in (\mathbb{R}^3)^*$  tal que  $f(u_1) = 1$ ,  $f(u_2) = -1$  e  $f(u_3) = 3$ . Determine  $f(a, b, c)$ , onde  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .
- (b) Se  $f \in (\mathbb{R}^3)^*$  é tal que  $f(u_1) = f(u_2) = 0$  e  $f(u_3) \neq 0$ , mostre que  $f(2, 3, -1) \neq 0$ .
- (2) Seja  $S \subset V$ . Defina anulador de  $S$ .
- (3) Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Prove que:
- (a)  $S \subset V \Rightarrow S^0 \leq V^*$ ;
- (b)  $S = \{0\} \Rightarrow S^0 = V^*$ ;
- (c)  $S = V \Rightarrow S^0 = \{0\}$ ;
- (d)  $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_2^0 \subset S_1^0$ .
- (4) Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial finitamente gerado. Se  $W \leq V$  mostre que
- $$\dim V = \dim W + \dim W^0.$$
- (5) (a) Seja  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ . Defina a transposta de  $T$ .
- (b) Mostre que  $\text{Ker}(T^t) = (\text{Im}T)^0$ .
- (c) Se  $U$  e  $V$  são finitamente gerados, mostre que  $\dim \text{Im}T^t = \dim \text{Im}T$ .
- (6) Seja  $V = P_2(\mathbb{R})$  e sejam  $f_1, f_2, f_3 \in V^*$  definidas por
- $$f_1(p) = \int_0^1 p(x)dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x)dx, \quad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)dx.$$
- (a) Mostre que  $\{f_1, f_2, f_3\}$  é uma base de  $V^*$ .
- (b) Exiba uma base de  $V$  da qual  $\{f_1, f_2, f_3\}$  seja a base dual.
- (7) Considere o  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial  $\mathbb{C}^3$ . Dada a base  $\mathfrak{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$  de  $\mathbb{C}^3$ , determine a base dual  $\mathfrak{B}^*$ .

- (8) Seja  $W \subset (\mathbb{R})^4$  um subespaço formado pelos funcionais  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\text{Ker}(f)$  contém os vetores  $(1, 0, 3, -2)$  e  $(0, 1, 3, 0)$ . Ache uma base de  $W$ .
- (9) Sejam  $u_1 = (1, 0, -1, 2)$ ,  $u_2 = (2, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$  e  $W = [u_1, u_2]$ . Determine os funcionais lineares que estão no anulador de  $W$ .
- (10) Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $S \subset V$ . Mostre que se  $W \leq V$  e  $W = [S]$  então  $S^0 = W^0$ .
- (11) Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial finitamente gerado e  $W_1$  e  $W_2$  subespaços de  $V$ . Mostre que:
- (a)  $W_1 = W_2$  se, e somente se,  $W_1^0 = W_2^0$ .
  - (b)  $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$ .
  - (c)  $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$ .
- (12) Encontre as bases duais e biduais de cada uma das seguintes bases do  $\mathbb{R}^3$ .
- (a)  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
  - (b)  $\{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$