UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Introdução à Álgebra***
Prof°. ***Victor Martins***

Lista 3: Teoria dos Conjuntos

(1) Assinale **V** para verdadeiro e **F** para falso:

(a) ( ) $3 = \{3\}$;
(b) ( ) $0 \in \emptyset$;
(c) ( ) $3 \in \{3\}$;
(d) ( ) $0 = \emptyset$;
(e) ( ) $5 \in \{\{5\}\}$;
(f) ( ) $4 \in \{\{4\}, 4\}$;
(g) ( ) $3 \subset \{3\}$;
(h) ( ) $\emptyset \in \{3\}$;
(i) ( ) $\{3,4\} \subset \{\{3,4\},\{5,6\}\}$;
(j) ( ) $\{2,8\} \subset \{2,8,9\}$.

(2) Sejam $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $C = \{5,6,7,8,9,10\}$ e denote por $\wp(X)$ o conjunto das partes de um conjunto X dado. Determine:

(a) $\wp(A)$;
(b) $\wp(B)$;
(c) $\wp(C)$;
(d) $\wp((A \cup B) \cap C)$.

(3) Considerando X um conjunto com 3 elementos, determine quantos elementos tem $\wp(X)$. No caso em que X tem 4 elementos, quantos elementos tem $\wp(X)$? E no caso em que X tem 5 elementos? Generalize para X um conjunto com n elementos.

(4) Assinale **V** para verdadeiro e **F** para falso, justificando com uma demonstração ou contra-exemplo cada item:

(a) ( ) $A \subset B$ e $B \not\subset C \Rightarrow A \not\subset C$;
(b) ( ) $x \in B$ e $B \subset C \Rightarrow x \in C$;

(c) ( ) $x \in B$ e $B \in C \Rightarrow x \in C$;

(d) ( ) $A \subset B$ e $B \not\subseteq C \Rightarrow A \notin C$.

(5) Sejam $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ (conjunto universo), $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $C = \{2, 6, 10\}$ e $D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Determine:

(a) A^C;

(b) B^C;

(c) $(A^C)^C$;

(d) $(D^C)^C$;

(6) Considere $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{1, 3, 5, \ldots\}$ e $C = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Determine $A \cap B, A \cap C, B \cap C, \mathbb{N} \cap A, \emptyset \cup B, (\mathbb{N} \cap A) \cap B, (A \cap \emptyset) \cup B, (B \cap \mathbb{N}) \cap \emptyset$.

(7) Dados $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 3\}$, $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Determine A nos seguintes casos:

(a) $A \cup B = U, A \cap B = \emptyset$ e $B = \{1\}$.

(b) $B \subset A$ e $A \cup B = \{4, 5\}$.

(c) $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ e $A \cup B = \{1, 2\}$.

(d) $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4\}$ e $B \cup C = \{1, 2, 3\}$.

(8) Sejam $A =$ conjunto dos quadriláteros; $B =$ conjunto dos quadrados; $C =$ conjunto dos losangos; $D =$ conjunto dos triângulos; $E =$ conjunto dos paralelogramos; $F =$ conjunto dos retângulos; $G =$conjunto dos triângulos equiláteros; $H =$ conjunto dos triângulos isósceles; $I =$ conjunto dos trapézios; $J =$ conjunto dos triângulos escalenos; $K =$ conjunto dos triângulos retângulos.

Assinale **V** para verdadeiro e **F** para falso:

(a) ( ) $B \subset I$;

(b) ( ) $B \subset C \subset E \subset A$;

(c) ( ) $G \cup H \cup I = D$;

(d) ( ) $C \cap F = B$;

(e) ( ) $F \cap E = \emptyset$;

(f) ( ) $H \cap G = H$;

(g) ( ) $H \cap G = G$;

(h) ( ) $G \cap K = J$;

(i) ( ) $K \cap G = \emptyset$;

(j) ( ) $K \subset J$;

(k) ( ) $(K \cup G) \cap D = J$;

(l) ( ) $I \subset E$;

(m) ( ) $G \neq H$.

(9) Dados $F = \{x : x \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 0 < x < 5\}$ e $G = \{x : x \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 4 < x < 7\}$, determine $F \cap G$ e $F \cup G$.

(10) Assinale **V** para verdadeiro e **F** para falso, justificando com uma demonstração ou contra-exemplo cada item:

(a) ( ) $(A - B) \subset A$;

(b) ( ) $B - (B - A) = A$;

(c) ( ) $A - B \neq B - A$;

(d) ( ) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$;

(e) ( ) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$;

(f) ( ) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.

(11) Considere o conjunto $U = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15\}$. Encontre o complementar em U dos conjuntos a seguir:

(a) $B = \{x \in U : x \quad \text{é múltiplo de } 5\}$;

(b) $D = \{x \in U : x \quad \text{é ímpar}\}$.

(12) Sejam $A = \{x : x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x^2 - 1 > 0\}$ e $B = \{x : x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x + 1 > 0\}$. Determine:

(a) $A \cup B$;

(b) $A^C \cap B$;

(c) $A \cap B^C$;

(d) $A^C \cup B^C$;

(e) $A^C \cap B^C$.

(13) Numa cidade há 1000 famílias: 470 assinam o Estado, 420 a Folha, 315 a Gazeta, 140 assinam a Gazeta e a Folha, 220 assinam a Gazeta e o Estado, 110 a Folha e o Estado e 75 assinam os três jornais.

(a) Quantas famílias não assinam jornal?

(b) Quantas famílias assinam algum dos jornais?

(c) Quantas famílias assinam apenas dois jornais?

(14) Mostre que:

(a) $A \cap (B - A) = \emptyset$;

(b) $A \cup (B - A) = A \cup B$;

(c) $A \cap B \subset A$;

(d) $A \subset A \cup B$;

(e) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$;

(f) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$;

(g) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^C = \emptyset$.

(15) Simplifique:

(a) $A \cap B^C \cap A^C \cap B^C$;

(b) $(A \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap C)$;

(c) $(A \cap B \cap C) \cup A^C \cup B^C \cup C^C$;

(d) $((A \cap B \cap C)^C)^C \cup (A \cap C)^C \cup C^C$;

(e) $((X \cap Y)^C)^C \cup (X^C \cap Y)$.

(16) Mostre que, se A e B são subconjuntos de U então são equivalentes:

(i) $A \subset B$

(ii) $A \cap B = A$

(iii) $A \cup B = B$

(iv) $A \cap B^C = \emptyset$

(v) $B^C \subset A^C$

(17) Se C tem n elementos e B tem m elementos, quantos elementos tem os conjuntos: $C \times C, B \times C, B \times B$?

(18) Mostre que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(19) Descubra conjuntos A, B e C tais que:

(a) $B \neq C$ e $A \cup B = A \cup C$.

(b) $B \neq C$ e $A \cap B = A \cap C$.

(20) Se A, B e C são conjuntos tais que $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$, prove que $B = C$.

(21) Sejam A e B conjuntos tais que $A \cap B = A \cup B$. Prove que $A = B$.

(22) Para indicar o número de elementos de um conjunto finito X, adotemos a notação $n(X)$. Mostre que, se A e B são conjuntos finitos temos $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.