



Prova 3 - 29/05/2019

(Questões sem justificativas não serão consideradas, portanto apresente as justificativas para cada solução.)

Nome: _____ Matrícula: _____

Questão 1: (1,5 pontos) Defina:

- (a) sequência crescente;
- (b) sequência não-crescente;
- (c) $\lim a_n = a$;
- (d) $\lim a_n = \infty$;
- (e) Sequência de Cauchy;
- (f) Enuncie o Teorema da Convergência Monótona.

Questão 2: (1,0 ponto) Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ a sequência de números reais dada por $a_n = \frac{\sin(nx)}{n}$. Mostre usando a definição de limite de sequência que $\lim a_n = 0$.

Questão 3: Seja $a \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < a < 1$.

- (a) (1,0 pontos) Mostre que existe o supremo do conjunto $X = \{a^n : n \in \mathbb{N}^*\}$ e determine este supremo.
- (b) (1,5 pontos) Mostre que a sequência $(a^n)_{n \geq 1}$ é decrescente e conclua que ela é convergente.
- (c) (1,0 ponto) Mostre, utilizando a definição de limite de uma sequência, que $\lim a^n = 0$.

Questão 4:

- (a) (0,5 pontos) Sejam a e b dois números reais positivos. Mostre que a média aritmética entre a e b é maior ou igual que a média geométrica entre esses dois números.
- (b) (1,5 pontos) Para cada real positivo a , considere a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ definida por $a_1 = 1$ e, para $k \geq 1$ inteiro,

$$a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{a}{a_k} \right).$$

Prove que a sequência converge para $\sqrt{a}$.

Questão 5: *(2,0 pontos)* Coloque **V** para as afirmações verdadeira e **F** para as falsas. Prove ou dê contra-exemplos em cada uma das afirmações.

- (a) () Toda sequência convergente é limitada;
- (b) () Toda sequência limitada é convergente ;
- (c) () Toda sequência de cauchy é limitada;
- (d) () Todo conjunto finito possui máximo.

Questão extra:

- (a) *(0,5 pontos)* Enuncie o Princípio de Indução Finita;
- (b) *(0,5 pontos)* Enuncie o Princípio da Boa Ordenação;
- (c) *(1,0 ponto)* Prove o princípio de indução como uma consequência do princípio da boa ordenação.

BOA PROVA!