



Prova 1 - 10/04/2019

(Questões sem justificativas não serão consideradas, portanto apresente as justificativas para cada solução.)

Nome: _____ Matrícula: _____

Questão 1: Dados uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, a **imagem direta** de X , denotada por $f(X)$ é o conjunto $f(X) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), \text{ para algum } x \in X\}$ e a **imagem inversa** de Y , denotada por $f^{-1}(Y)$ é o conjunto $f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in Y\}$. Mostre que se $A, B \subset \mathbb{R}$ então:

- (a) (0,5 pontos) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
- (b) (1,0 ponto) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Questão 2:

- (a) (0,5 pontos) Defina corpo.
- (b) (0,5 pontos) Enuncie a Lei do Anulamento do Produto no conjunto dos números reais.
- (c) (0,5 pontos) Enuncie o Postulado de Dedekind.
- (d) (1,5 pontos) Enuncie e prove a Desigualdade Triangular para números reais.

Questão 3: (1,5 pontos) Mostre que se $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ e X possui cota inferior então X possui ínfimo.

Questão 4: (2,0 pontos) Se A e B são conjuntos não vazios de números reais positivos, considere o conjunto $A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A \text{ e } y \in B\}$. Suponha A e B limitados inferiormente. Mostre que existe o ínfimo de $A \cdot B$ e que

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

Questão 5:

- (a) (1,0 ponto) Mostre que existe ínfimo do conjunto $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ e determine este ínfimo.
- (b) (1,0 ponto) Mostre que existe supremo do conjunto $A = \{y \in \mathbb{Q} : 0 < y < 1\}$ e determine este supremo.

BOA PROVA!