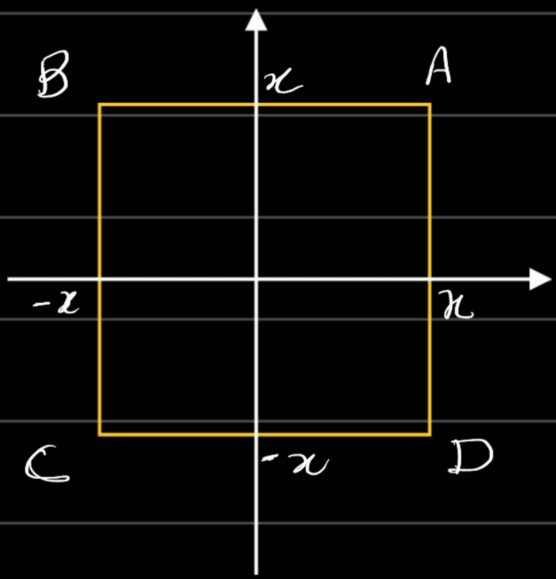
P3 - Matemática Básica II

23/06/2022

Questão 1:

a) Da primeira e terceira informações temos que $A = (x, x)$

Vamos assumir $x > 0$, daí das informações dadas teremos o seguinte esboço do quadrado ABCD



Portanto temos, $A = (x, x)$, $B = (-x, x)$, $C = (-x, -x)$, $D = (x, -x)$.

b) Como P está na bissetriz dos quadrantes pares e sua ordenada é b então $P = (-b, b)$.

Como Q também está na bissetriz dos quadrantes pares, então Q é do tipo $Q = (x, -x)$.

Como as distâncias de P e Q a origem coincidem temos:

$$d(P,O) = d(Q,O) \iff$$
$$\sqrt{(-b-0)^2+(b-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(-x-0)^2} \iff$$
$$\sqrt{2b^2} = \sqrt{2x^2} \iff$$
$$|b|\cancel{\sqrt{2}} = |x|\cancel{\sqrt{2}} \iff$$
$$|b| = |x| \Rightarrow x = b \text{ ou } x = -b$$

Como Q é um ponto distinto de P então $x = b$. Logo $P = (-b, b)$ e $Q = (b, -b)$.

//

Questão 2:

a) Note que a reta r contém os pontos (0,0) e (3,2). Assim a reta procurada é:

$$y - 0 = \frac{2-0}{3-0}(x-0) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{2}{3}x$$

—————— // ——————

b) A direção do vetor u é a direção da reta r, encontrada no item anterior. O sentido de u é da origem para o ponto (3,2). E o módulo do vetor u é:

$$\|u\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

—————— // ——————

c) Sabemos que $v = \frac{u}{\|u\|}$ é um vetor unitário de mesma direção e sentido que u.

Portanto $v = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

—— // ——

d) Como u e w são perpendiculares então $u.w = 0$. Daí temos:

$$u \cdot w = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3,2)\cdot(-1,m) = 0 \Leftrightarrow -3 + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m = 3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}} ///$$

—— // ——

Questão 3:

a) $u \cdot v = (2,2)\cdot(2,0) = 4 + 2\cdot 0 = 4$

—— // ——

b) Note que:

$$\|u\| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$$

$$\|v\| = \sqrt{2^2+0^2} = 2$$

Daí temos que se θ é o ângulo entre u e v então

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{4}{2\sqrt{8}} \Leftrightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

~~ // ~~

Alternativamente, podemos calcular $m = tg\theta$ que é a inclinação da reta suporte do vetor u. Essa reta passa por $(2,2)$ e $(0,0)$, logo

$$tg\,\theta = m = \frac{2-0}{2-0} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

—— // ——

c) Observe que, pelo enunciado procuramos uma reta r que passa por $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ e tem mesma inclinação que a reta suporte do vetor u. Como vimos acima a inclinação de r será então $m = 1$. Daí, a equação de r é

$$y - \frac{1}{3} = 1(x - (-2)) \Leftrightarrow y = x + 2 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{y = x + \frac{7}{3}}$$ ///

—— // ——

Questão 4:

a) A circunferência de centro C e raio r é o lugar geométrico dos pontos cuja distância até C é igual a r.

O disco aberto de centro C e raio r é o lugar geométrico dos pontos cuja distância até C é menor que r.

O disco fechado de centro C e raio r é o lugar geométrico dos pontos cuja distância até C é menor ou igual a r.

—— // ——

b) Completando quadrados na equação $x^2+y^2-4x-2y+4=0$, temos

$x^2+y^2-4x-2y+4=0 \Leftrightarrow$
$x^2-4x+4+y^2-2y+1+4-4-1=0 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

Portanto, a circunferência tem centro $C=(2,1)$ e raio $r=1$.

—— // ——

e) Vejamos se existe intersecção entre a circunferência e a reta dada resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+4=0 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

Substituindo o valor de y da segunda equação na primeira, temos:

$x^2+(2x-1)^2-4x-2(2x-1)+4=0 \Leftrightarrow$
$x^2+4x^2-4x+1-4x-4x+2+4=0 \Leftrightarrow$
$5x^2-12x+7=0 \Leftrightarrow$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4.5.7}}{10} = \frac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 2.1 - 1 = 1 \Rightarrow (1,1) = P$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \Rightarrow y_2 = 2.\frac{7}{5} - 1 = \frac{9}{5} \Rightarrow \left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right) = Q$$

Portanto a reta corta a circunferência em dois pontos, logo ela é secante à circunferência.

—— // ——

d) Observe que

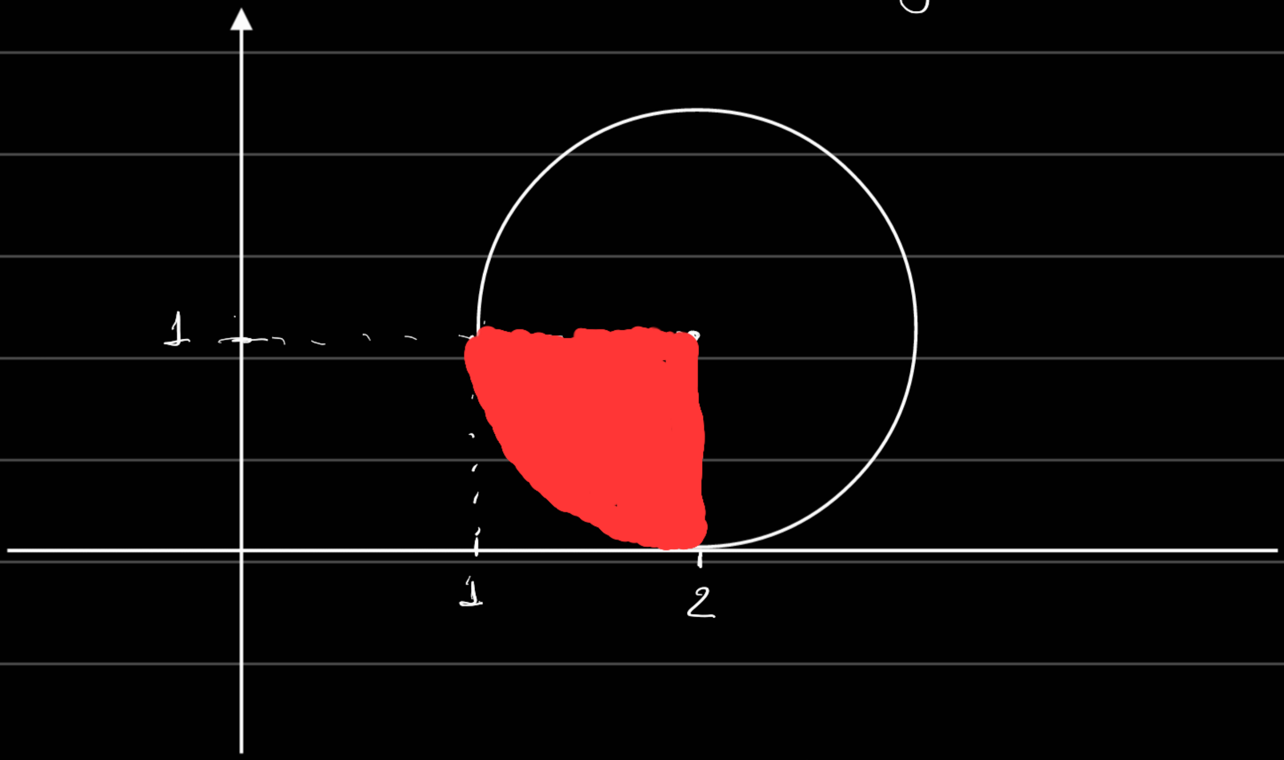
$$x^2 + y^2 - 4x - 2x + 4 \leq 0$$

equivale a

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1,$$

utilizando o que encontramos no item (b).

Logo trata-se do disco fechado de centro $(2,1)$ e raio 1.
Basta desenharmos esse disco e considerarmos a região desenhada que ainda satisfaz $y \leq 1$ e $x \leq 2$.



---

e) Note que as duas circunferências possuem o mesmo centro. Logo existem duas possibilidades para essas circunferências concêntricas.

- se $c \neq 4$ então elas não possuem intersecção.
- se $c = 4$ elas são coincidentes.

Questão extra:

a) Note que o centro de C é a origem (0,0) e o raio de C é $\|u\|$.

Temos que $u=(1,2)$, logo $\|u\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

Portanto a equação de C é

$$(x-0)^2+(y-0)^2=(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x^2+y^2=5}}$$

---

b) Observe que r passa pelo ponto (1,2) e é perpendicular ao vetor u, já que o comprimento do vetor u é o raio da circunferência e r é tangente a C. Logo a inclinação de r é $-\frac{1}{m}$, onde m é a inclinação da reta que passa por u. Isto é,

$$m = \frac{2-0}{1-0} = 2,$$

já que esta última reta passa por $(1,2)$ e $(0,0)$.

Assim a equação de r é

$$y-2 = -\frac{1}{m}(x-1) \Leftrightarrow$$

$$y-2 = \frac{-1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y-2 = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}}$$

---

e) (i) Observe que a reta r encontrada no item anterior é dada por

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

enquanto s é dada por

$$-x - 2y = 5 \iff 2y = -x - 5 \iff$$
$$y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$$

Ou seja, r e s possuem mesma inclinação. Logo r e s são retas paralelas.

(ii) Vejamos se s e C possuem interseção resolvendo o sistema

$$\begin{cases} -x - 2y = 5 \Rightarrow x = -5 - 2y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Daí,

$$(-5 - 2y)^2 + y^2 = 5 \iff 25 + 20y + 4y^2 + y^2 = 5$$
$$\iff 5y^2 + 20y + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y = -2 \Rightarrow x = -5 - 2(-2) = -1$$

Portanto s e C se interceptam no ponto $(-1, -2)$. Logo s é tangente a C.