

Prova 2 - 16/10/2026 - Cálculo C / Cálculo Dif. e Int. II

Questão 1.

Considere a função $z = x^2 + y^2$ dada pela superfície de nível $F(x, y, z) = 0$, onde

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

Dado um ponto (x, y, z) nessa superfície, o vetor normal ao plano tangente neste ponto é dado por:

$$\nabla F(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, -1)$$

Como buscamos o plano tangente que seja paralelo ao plano $2x + 2y - z = 1$, então o vetor normal $(2, 2, -1)$ a este último plano deve ser paralelo ao vetor normal do plano tangente procurado, isto é,

$$\begin{aligned}\nabla F(x, y, z) \parallel (2, 2, -1) &\Rightarrow (2x, 2y, -1) = \lambda(2, 2, -1) \\ &\Rightarrow \lambda = 1\end{aligned}$$

Portanto,

$$2x = 2, \quad 2y = 2 \quad \Rightarrow x = 1 = y \quad \Rightarrow z = 1^2 + 1^2 = 2$$

e o ponto de tangência será $(1, 1, 2)$

A equação do plano tangente procurado é

$$\nabla F(1,1,-1) \cdot (x-1, y-1, z-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2, 2, -1)(x-1, y-1, z-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{2x + 2y - z = 2}$$



Questão 2: $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 12y, -12x + 24y^2)$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 24y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y^2$$

$$3x^2 - 12y = 0 \Rightarrow 3(2y^2)^2 - 12y = 0 \Rightarrow$$

$$12y^4 - 12y = 0 \Rightarrow y(y^3 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$y = 0 \text{ ou } y = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 2 \cdot 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 2 \cdot 1 \Rightarrow x = 2$$

Pontos críticos: $(0, 0), (2, 1)$

Teste da derivada segunda:

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

$$= 6x \cdot 48y - 144$$

$$H(0, 0) = -144 \Rightarrow (0, 0) \text{ é ponto de sela}$$

$$H(2, 1) = 12 \cdot 48 - 12 \cdot 12 = 12(48 - 12) = 12 \cdot 36 > 0 \text{ e}$$

$$f_{xx}(2, 1) = 12 > 0 \Rightarrow \underline{(2, 1) \text{ é ponto de mínimo local.}}$$

Questão 3: (ANULADA)

Queremos achar o ponto de mínimo da função

$$d(P, O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

quando (x, y, z) está na interseção dos planos dados.

É suficiente achar o ponto de mínimo da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com as restrições

$$\underbrace{x+y+z=1}_{g(x,y,z)} \quad \text{e} \quad \underbrace{3x+2y+z=6}_{h(x,y,z)}$$

Usando multiplicadores de Lagrange, temos:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 1 \\ h(x, y, z) = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(3, 2, 1) \\ x+y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda + 3\mu \\ 2y = \lambda + 2\mu \\ 2z = \lambda + \mu \\ x+y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+y+z=1 &\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda+3\mu+\lambda+2\mu+\lambda+\mu=2 \\ 3\lambda+9\mu+2\lambda+4\mu+\lambda+\mu=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3\lambda+6\mu=2 \Rightarrow 3\lambda=2-6\mu \\ 6\lambda+14\mu=12 \end{cases}$$

$$6\lambda+14\mu=12 \Rightarrow 4-12\mu+14\mu=12$$

$$\Rightarrow 2\mu=8 \Rightarrow \boxed{\mu=4}$$

$$\Rightarrow 3\lambda=2-24$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{22}{3}}$$

Portanto,

$$2x = \lambda+3\mu = -\frac{22}{3}+12 \Rightarrow x = -\frac{11}{3}+6 \Rightarrow \boxed{x=\frac{7}{3}}$$

$$2y = \lambda+2\mu = -\frac{22}{3}+8 \Rightarrow y = -\frac{11}{3}+4 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}}$$

$$2z = \lambda+\mu = -\frac{22}{3}+4 \Rightarrow z = -\frac{11}{3}+2 \Rightarrow \boxed{z=-\frac{5}{3}}$$

O ponto procurado é $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$.

— 4 —

Questão 4: $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

$$a) \nabla f(x,y) = (2xe^{x^2-y^2}, -2ye^{x^2-y^2})$$

Direção da taxa de variação máxima

$$\nabla f(1,1) = (2, -2)$$

Taxa de variação máxima

$$\|\nabla f(1,1)\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$b) D_v f(1,1) = D_u f(1,1), \text{ onde}$$

$$v = (1,3) \quad \text{e} \quad u = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

$$\begin{aligned} D_v f(1,1) &= D_u f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot u \\ &= (2, -2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{10}}$$

