



Disciplina: *Álgebra Linear II*

Prof. *Victor Martins*

Lista 5: Formas canônicas

- (1) (a) Defina subespaço invariante.
(b) Seja $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$, $T(x, y) = (y, -x)$. Mostre que os subespaços invariantes por T são os triviais.
- (2) Determine todos os subespaços invariantes por T para $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ dada por:
(a) $T(x, y) = (-x + 2y, 2x - 3y)$;
(b) $T(x, y) = (2x - 5y, x + 2y)$.
- (3) Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, $W \subset V$ um subespaço de V e $\lambda \in \mathbb{K}$. Mostre que W é $(\lambda I - T)$ -invariante se e somente se W for T -invariante.
- (4) (a) Defina multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica de um autovalor λ de T .
(b) Defina polinômio minimal de T .
- (5) Seja $T \in \mathfrak{L}(V, V)$, um operador linear com polinômio minimal $m_T(x) = (x - \lambda)$ com $\lambda \in \mathbb{K}$. Mostre que T é diagonalizável.
- (6) Encontre todas as possibilidades para o polinômio minimal de um operador $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ com polinômio característico:
(a) $p_T(x) = (x - 3)^3(x - 2)^2$.
(b) $p_T(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$.
(c) $p_T(x) = (x - 1)^m \quad m \geq 1$.
- (7) Encontre as matrizes companheiras dos seguintes polinômios:
(a) $p(x) = (x - 3)^2(x^2 + 2)$.
(b) $p(x) = (x - 1)^4(x + 1)$.
(c) $p(x) = (x - 1)^n(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) \quad n \geq 2$.
- (8) Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um operador com $m_T(x) = (x - 2)^2(x + 1)^2$. Encontre um vetor $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = C_T(v)$.

(9) Encontre, se existirem, exemplos de operadores $T : V \rightarrow V$, onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, tais que:

(a) V não seja T -cíclico.

(b) V tenha dimensão 4 e contenha um subespaço T -cíclico de dimensão 3.

(c) T seja injetora e tal que $m_T(x)$ tenha grau 1.

(10) Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Mostre que se para algum $l > 0$, temos que $\ker(T^l) = \ker(T^{l+1})$, então $\ker(T^l) = \ker(T^{l+i})$, para todo $i \geq 0$.

(11) Seja $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ o operador linear dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3x_1 - 2x_5, 0, 2x_3 - x_4 + x_5, x_5 - x_1, 2x_1 - x_5).$$

Determine a decomposição $T = T_1 \oplus T_2$ onde T_1 é nilpotente e T_2 é inversível.