



Disciplina: *Álgebra Linear II*
Prof. *Victor Martins*

Lista 2: Transformações Lineares

- (1) Defina transformação linear e mostre que se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ então
 - (a) $T(0) = 0$;
 - (b) $T(cu + v) = cT(u) + T(v)$, com $c \in \mathbb{K}$ e $u, v \in U$.
- (2) Mostre que T é injetora se, e somente se, $\text{Ker}(T) = \{0\}$.
- (3) Sejam U, V \mathbb{K} -espaços vetoriais e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Prove que se $U = \langle S \rangle$ então $\text{Im} T = \langle T(S) \rangle$.
- (4) Verifique se as aplicações são lineares:
 - (a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_1(\mathbb{R})$, $T(a, b) = a + bx$;
 - (b) $T : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(a + bx) = (a, a - b, b + 1)$;
 - (c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} z & x \\ y & \cos z \end{pmatrix}$;
 - (d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, y - x, 0)$;
 - (e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x + y - z$;
 - (f) $T : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $T(A) = AB - BA$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ fixa;
 - (g) $T : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $T(A) = \text{tr}(A)$.
- (5) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfaz $T(1, 1) = (-1, 2)$ e $T(-1, 1) = (2, -4)$.
 - (a) Calcule $T(0, 1)$ e $T(7, -3)$.
 - (b) Encontre, se possível, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (\pi, -2\pi)$.
 - (c) Determine uma base para cada um dos subespaços $\text{Ker}(T)$, $\text{Im}(T)$, $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T)$, $\text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$.
- (6) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem da transformação linear $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = MX - XM$, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(7) Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma transformação linear satisfazendo $T(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 1, 1)$, $T(1, 0, 1, 1) = (0, 1, 3, 3)$, $T(0, 0, 1, 1) = (0, 1, 2, 2)$, $T(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 1, 1)$. Determine uma base de cada um dos subespaços $Ker(T)$, $Im(T)$, $Ker(T) \cap Im(T)$, $Ker(T) + Im(T)$.

(8) Consideremos a transformações linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$T(x, y, z) = (x - z, x + y - 2z, y - z).$$

Encontre:

(a) $T(1, -1, 2)$, $T(0, 1, -1)$ e $T(1, 0, 1)$.

(b) Pelo menos um vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (1, 2, 1)$.

(c) Os subespaços $Ker(T)$, $Im(T)$ e $Ker(T) \cap Im(T)$.

(d) Subespaços $W_1 \subset P_2(\mathbb{R})$ e $W_2 \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tais que W_1 seja isomorfo a $Ker(T)$ e W_2 seja isomorfo a $Im(T)$.

(9) Sejam $\{u, v\}$ uma base de \mathbb{R}^2 e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_7(\mathbb{R})$ uma transformação linear. Mostre que uma (e somente uma) das seguintes condições se verifica:

(a) $\{T(u), T(v)\}$ é l.i.;

(b) $\dim Im(T) = 1$;

(c) $Im(T) = \{0\}$.

(10) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} de dimensão 3 e $\mathfrak{B} = \{u, v, w\} \subset V$ um subconjunto de V . Mostre que a aplicação linear $T : V \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(u) = 7, \quad T(v) = 1 - x \quad \text{e} \quad T(w) = x + x^2$$

é bijetora e \mathfrak{B} é uma base de V .

(11) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que o núcleo seja o plano de equação $x + y - z = 0$.

(12) Sejam U, V \mathbb{K} -espaços vetoriais e $T \in \mathfrak{L}(U, V)$. Mostre que:

(a) $Ker(T)$ é subespaço de U ;

(b) $Im(T)$ é subespaço de V .

(13) Sejam U, V \mathbb{K} -espaços vetoriais e $T \in \mathfrak{L}(U, V)$. Mostre que T é injetora se, e somente se T leva conjunto l.i. de U em conjunto l.i. de V .

(14) Sejam W_1, \dots, W_s subespaços de V . Dizemos que W_1, \dots, W_s são **independentes** se $v_1 + \dots + v_s = 0$ com $v_k \in W_k$, $k = 1, \dots, s$ implica $v_k = 0$, para todo $k = 1, \dots, s$. Mostre que se $W = W_1 + \dots + W_s$ então são equivalentes:

(a) W_1, \dots, W_s são independentes.

(b) $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$.

(c) Se \mathcal{B}_k é uma base de W_k , $k = 1, \dots, s$, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_s$ é base de W .

(d) $\dim W = \dim W_1 + \dots + \dim W_s$.

(15) Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial com $\dim V = n$, \mathcal{B} base ordenada de V e $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversível. Mostre que existe uma base \mathcal{B}' de V tal que P é a matriz mudança de base de \mathcal{B}' para \mathcal{B} .

(16) Sejam $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$ e

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, v_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

os vetores linhas de A . O **posto-linha** de A é a dimensão do subespaço W de \mathbb{K}^n definido por $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. De modo análogo definimos o **posto-coluna** de A . Mostre que se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ então existem matrizes inversíveis M e P tais que

$$MAP = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo s o posto-coluna de A e I_s a matriz identidade $s \times s$.

(17) Mostre que se U e U' são isomorfos e que se V e V' são isomorfos, então $\mathfrak{L}(U, V)$ é isomorfo a $\mathfrak{L}(U', V')$.

(18) Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial. Mostre que se $p(x), q(x) \in P(\mathbb{K})$, então

$$(p \cdot q)(T)(v) = p(q(T))(v), \quad \forall v \in V.$$