



TESTE 5 - 17/06/2025

(Deverá ser entregue no dia 24/06/2025)

Questão 1: Uma **progressão aritmética** de razão r e termo inicial a_1 é uma sequência

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

em que a diferença de dois termos consecutivos é sempre igual a r , isto é

$$a_n - a_{n-1} = r, \forall n \geq 2.$$

Consequentemente, temos que o n -ésimo termo da progressão é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$. Mostre que não é possível formar uma progressão aritmética somente com números primos.

Questão 2: Sejam a, b e c inteiros. Mostre que $\text{mdc}(a, bc) = 1$ se, e somente se, $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, c) = 1$.

Questão 3: (Fuvest 1984) Sejam $m = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, $n = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^t$ e $p = 2^5 \cdot 5^4$.

(a) Quantos divisores de m são múltiplos de 100? Justifique.

(b) Escreva as condições sobre r, s e t para que n seja divisor comum de m e p .

Questão 4: Mostre que se a soma de dois números naturais não nulos é um número primo, então esses números são primos entre si.

Questão 5: Mostre que $7|(3^{2n+1} + 2^{n+2})$ para todo inteiro $n \geq 0$.

Questão 6:

(a) Mostre que, se a não é divisível por 3, então a^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

(b) Prove que, se a e b são inteiros tais que 3 divide $a^2 + b^2$, então a e b são divisíveis por 3.

Questão 7: Se um macaco sobe uma escada de 2 em 2 degraus, sobra 1 degrau. Se ele sobe de 3 em 3 degraus, sobram 2. Quantos degraus a escada possui, sabendo que o número de degraus é múltiplo de 7 e que está compreendido entre 40 e 100?

Questão 8:

(a) Mostre que $\bar{a}$ é inversível em $\mathbb{Z}_m$ se, e somente se, $\text{mdc}(a, m) = 1$;

(b) Verifique se $\overline{3640}$ é inversível em $\mathbb{Z}_{7297}$.

Questão 9: Mostre que $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

Questão 10: Mostre que se a soma de dois números naturais não nulos é um número primo, então esses números são primos entre si.

Questão 11: Resolva o sistema de congruências

$$12x \equiv 6 \pmod{22}$$

$$9x \equiv 18 \pmod{24}$$

$$4x \equiv -1 \pmod{15}$$