UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Análise Matemática*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 1: Conjuntos finitos e infinitos

(1) Mostre, por indução, que:

(a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) $1 + n \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(c) $2^n < n!$, para todo $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) Considere uma progressão aritmética de razão r e termo inicial a_1. Usando indução, prove que:

(a) $a_n = a_1 + (n-1)r$;

(b) Mostre que a soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é dada por

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

(3) Uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1 é uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ em que o quociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ é sempre igual a q, para todo $n \geq 2$. Considere uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1. Usando indução prove que:

(a) $a_n = a_1 q^{n-1}$;

(b) A soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é dada por

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

(4) (a) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^2 e A^3 para determinar uma possível fórmula para A^n, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demonstre a fórmula encontrada no item anterior por indução.

(5) Mostre que $a^+ \neq a$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

(6) Mostre, usando o Princípio da Boa Ordenação (PBO), que:

(a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) $1 + n \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(7) Use o PBO para provar que qualquer subconjunto dos naturais não vazio e limitado superiormente tem um maior elemento. (Sugestão: suponha que cada elemento nesse conjunto S, seja menor que n. Considere o conjunto de todos os números da forma $n - s$, onde $s \in S$.)

(8) Mostre que o PBO implica o princípio de indução.

(9) Mostre que $x_n = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ é múltiplo de 7 , para todo $n \in \mathbb{N}$.

(10) ***(Desigualdade de Bernoulli)*** Mostre que $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, para todo número real h tal que $h > -1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

(11) Se $0 \leq k \leq n$, define-se o "coeficiente binomial" $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
Mostre que

(a) $\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}, \quad k \neq 0, n$ (Relação de Stifel)

(b) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ é sempre um número natural.

(12) Faça uma conjectura a respeito da soma

$$S_n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Prove sua conjectura.

(13) Prove que a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$ é uma bijeção.

(14) Seja $I_n = \{p \in \mathbb{N} : \; p \leq n\}$.

(a) Dados m, n dois números naturais tais que $m > n > 0$, mostre que não existe nenhuma função injetora de I_m em I_n.

(b) Dados dois conjuntos X e Y respectivamente com m e n elementos, se $m > n > 0$, mostre que não existe nenhuma função injetora de X em Y.

(15) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P_n = \{X \subset \mathbb{N} : |X| = n\}$. Prove que P_n é enumerável. Conclua que o conjunto P_f dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

(16) Sejam Y enumerável e $f : X \to Y$ tal que, para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é enumerável. Prove que X é enumerável.

(17) Mostre que todo conjunto finito possui máximo.

(18) Prove que o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos dos naturais não é enumerável.

(19) Mostre que todo conjunto infinito possui um subconjunto (infinito) enumerável.

(20) Construa uma bijeção do intervalo $(0, 1)$ na reta $(-\infty, \infty)$.

(21) Um número real r chama-se **algébrico** quando existe um polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, não identicamente nulo, com coeficientes inteiros, tal que $f(r) = 0$.

(a) Prove que o conjunto dos polinômios de coeficientes inteiros é enumerável.

(b) Mostre que o conjunto dos números algébricos reais é enumerável.

(22) Seja X o complementar de um conjunto enumerável de números reais. Mostre que, para cada intervalo aberto (a, b), a intersecção $(a, b) \cap X$ é não enumerável.

(23) Defina uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $f^{-1}(n)$ seja infinito.

(24) Obtenha uma decomposição $\mathbb{N} = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup \cdots$ tal que os conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ são infinitos e dois a dois disjuntos.

(25) Hilbert observou que um hotel com um número infinito de quartos sempre pode acomodar mais hóspedes, mesmo se tivermos uma infinidade de novos hóspedes e que os quartos do hotel já estejam ocupados. Explique como fazer isso.