UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Introdução à Álgebra (2018/2)***
Prof°. *Victor Martins*

Lista 2: Indução Matemática

(1) Verifique, por indução, que as seguintes fórmulas são válidas para $n \geq 1$:

(a) $5 + 9 + 13 + \ldots + (4n + 1) = n(2n + 3)$;

(b) $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

(2) Considere uma progressão aritmética de razão r e termo inicial a_1. Usando indução, prove que:

(a) $a_n = a_1 + (n-1)r$

(b) Mostre que a soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é dada por

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

(3) (a) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^2 e A^3 para determinar uma possível fórmula para A^n, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demonstre o resultado obtido em (a) por indução.

(4) Mostre, por indução, que:

(a) $1 + n \leq 2^n$ para todo inteiro $n \geq 0$;

(b) $2^n < n!$ para todo $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$;

(5) Utilize indução e faça o que se pede:

(a) Prove que o número de diagonais d_n de um polígono convexo de n lados é dado por

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

(b) Prove que a soma S_n dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é

$$S_n = (n-2) \cdot 180°.$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Introdução à Álgebra***
Prof°. ***Victor Martins***

Princípio da Boa Ordenação

1. Mostre usando o Princípio da Boa Ordenação (PBO):

   (a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \geq 1.$

   Solução: Considere

$$F=\{n \in \mathbb{N}: 1+2+3+\ldots+n \neq \frac{n(n+1)}{2}\}.$$

Temos:

(i) $F \subset \mathbb{Z}$;

(ii) $1 \notin F$, pois $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Daí, se $n \in F$ então $n>1$. Assim 1 é uma cota inferior para F;

(iii) Suponha $F \neq \emptyset$.

De $(i),(ii)$ e (iii) temos pelo PBO que existe $n_0 \in F$ menor elemento de F, isto é,

$$1+2+3+\ldots+n_0 \neq \frac{n_0(n_0+1)}{2} \quad \text{e} \quad n_0 \leq n,\ \forall n \in F. \tag{1}$$

Assim $(n_0-1) \notin F$, pois do contrário teríamos uma contradição com o fato de n_0 ser o menor elemento de F.

$$(n_0-1) \notin F \Rightarrow 1+2+3+\ldots+(n_0-1)=\frac{(n_0-1)(n_0)}{2}.$$

Daí,

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+(n_0-1)}_{\frac{(n_0-1)(n_0)}{2}}+n_0=\frac{(n_0-1)(n_0)}{2}+n_0=\frac{n_0(n_0+1)}{2},$$

mas isso é um absurdo, pois contradiz (1). A contradição vem do fato de supormos em (iii) que $F \neq \emptyset$. Portanto, $F=\emptyset$ e $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2},\ \forall n \geq 1.$

(b) $1 + n \leq 2^n$ para todo inteiro $n \geq 0$.

Solução: Considere
$$F = \{n \in \mathbb{Z}^+ : 1 + n > 2^n\}.$$

Temos:

(i) $F \subset \mathbb{Z}$;

(ii) $0 \notin F$, pois $1 + 0 =\leq 2^0$. Daí, se $n \in F$ então $n > 0$. Assim 0 é uma cota inferior para F;

(iii) Suponha $F \neq \emptyset$.

De $(i), (ii)$ e (iii) temos pelo PBO que existe $n_0 \in F$ menor elemento de F, isto é,
$$1 + n_0 > 2^{n_0} \quad \text{e} \quad n_0 \leq n,\ \forall n \in F. \tag{2}$$

Assim $(n_0 - 1) \notin F$, pois do contrário teríamos uma contradição com o fato de n_0 ser o menor elemento de F.

$$(n_0 - 1) \notin F \Rightarrow 1 + (n_0 - 1) \leq 2^{n_0 - 1}.$$

Daí,

$$1 + (n_0 - 1) \leq 2^{n_0-1} \Rightarrow 1 + n_0 \leq 2^{n_0-1} + 1 \leq 2^{n_0-1} + 2^{n_0-1} = 2.2^{n_0-1} = 2^{n_0},$$

onde a última desigualdade segue do fato de que $n_0 > 0$, logo $n_0 - 1 \geq 0$ e assim $2^{n_0-1} \geq 1$. Logo concluimos que

$$1 + n_0 \leq 2^{n_0},$$

mas isso é um absurdo, pois contradiz (2). A contradição vem do fato de supormos em (iii) que $F \neq \emptyset$. Portanto, $F = \emptyset$ e $1 + n \leq 2^n,\ \forall\, n \geq 0$.

2. Defina conjunto limitado superiormente. Use o PBO para provar que qualquer subconjunto dos inteiros não vazio e limitado superiormente tem um maior elemento. (Sugestão: suponha que cada elemento nesse conjunto S, seja menor que n. Considere o conjunto de todos os números da forma $n - s$, onde $s \in S$.)

Solução:
Definição: Dizemos que um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é *limitado superiormente* se existe um número $n \in \mathbb{R}$ tal que $n \geq s$ para todo $s \in S$. Nesse caso, n é uma *cota superior* para o conjunto S.

Mostremos que, *se S é um subconjunto dos inteiros não vazio e limitado superiormente, então S possui um maior elemento.*

De fato, seja $S \subset \mathbb{Z}$, $S \neq \emptyset$ e suponha que exista um número $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq s$ para todo $s \in S$. Defina o conjunto F da seguinte forma:

$$F = \{n - s : \, s \in S\}.$$

Obeserve que por definição de F, temos $F \subset \mathbb{Z}$. Como S é não vazio, segue que $F \neq \emptyset$ e como $n \geq s$ para todo $s \in S$ então $n - s \geq 0$ para todo $(n - s) \in F$. Logo 0 é uma cota inferior para F. Daí estamos nas condições do PBO e daí, existe um $(n - s_0) \in F$ que é o menor elemento deste conjunto, isto é,

$$(n - s_0) \in F \Rightarrow s_0 \in S \quad \text{e}$$

$$n - s_0 \leq n - s, \; \forall \, s \in S \Rightarrow s_0 \geq s, \; \forall \, s \in S.$$

Portanto s_0 é o maior elemento do conjunto S, como queríamos demonstrar.

3. Mostre que o PBO implica a 1ª forma de indução.

Solução: Devemos mostrar que, dada uma função proposicional $P(n)$ que satisfaz:

(i) $P(1)$ é verdadeira;

(ii) $P(k+1)$ é verdadeira sempre que $P(k)$ for verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

De fato, vamos supor por absurdo que o que queremos provar não seja verdade, isto é, existe algum $m \geq 1$ tal que $P(m)$ seja falso. Em outras palavras, estamos supondo que o conjunto

$$F = \{n \in \mathbb{N} : \, P(n) \quad \text{é falsa}\}$$

é não vazio. Além disso, por construção do conjunto F, ele é um subconjunto dos inteiros. Agora note que, por (i), $1 \notin F$, logo se $n \in F$, então $n > 1$ e então 1 é uma cota inferior de F. Resumindo, temos que

(a) Estamos supondo $F \neq \emptyset$;

(b) $F \subset \mathbb{Z}$;

(c) 1 é cota inferior para F.

Logo, pelo PBO, F possui um menor elemento, digamos n_0. Isto é,

$$n_0 \leq n, \; \forall \, n \in F \quad \text{e} \quad n_0 \in F.$$

Sendo assim, $(n_0 - 1) \notin F$, pois do contrário estaríamos contrariando a minimalidade de n_0. Então $P(n_0 - 1)$ é verdadeira.

Logo, por (ii), se $P(n_0 - 1)$ é verdadeira então $P(n_0 - 1 + 1) = P(n_0)$ é verdadeira. E temos um absurdo, pois $n_0 \in F$ e então $P(n_0)$ é falso. O absurdo vem do fato de estarmos supondo $F \neq \emptyset$. Daí, $F = \emptyset$ e portanto para todo $n \geq 1$, $P(n)$ é verdadeira.