



Disciplina: *Análise Matemática*

Profº. *Victor Martins*

Lista 3: Sequências e séries

(1) Determine o termo geral a_n das sequências a seguir:

(a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

(b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots$

(2) Dê exemplos de:

(a) uma sequência limitada superiormente mas que não é limitada inferiormente;

(b) uma sequência limitada inferiormente mas que não é limitada superiormente;

(c) uma sequência divergente que possui subsequência convergente;

(a) uma sequência monótona que não é convergente;

(b) uma sequência limitada que não é convergente;

(c) uma sequência que não seja limitada mas que possui subsequência convergente.

(3) Se $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$ em $\mathbb{R}$, mostre que:

(a) $ka_n \rightarrow ka, \quad k \in \mathbb{R};$

(b) $a_n + b_n \rightarrow a + b;$

(c) $a_nb_n \rightarrow ab;$

(d) $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ desde que $b \neq 0$.

(4) Mostre que se $\lim a_n = 0$ e $(b_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência limitada então $\lim (a_n \cdot b_n) = 0$.

(5) Seja p um número real positivo fixado. Mostre que:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } p > 1 \\ 1, & \text{se } p = 1 \\ 0, & \text{se } 0 \leq p < 1 \end{cases} ; \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } p > 1 \\ 0, & \text{se } 0 \leq p \leq 1 \end{cases} .$$

(6) Em cada um dos itens abaixo, a_n é o termo geral da sequência $(a_n)_{n \geq 1}$. Utilize a definição de limite de uma sequência para mostrar que $\lim a_n = 3$.

$$(a) \ a_n = \frac{3n^2 + 4n}{n^2 + n - 4};$$

$$(b) \ a_n = \frac{3n\sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 5};$$

$$(c) \ a_n = \frac{3n}{n + \sin(2n)}.$$

(7) Se $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$ prove que $a_n \rightarrow 0$.

(8) Se $0 < a_1 < 1$ e se $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$, para todo $n \geq 1$, prove que $(a_n)_{n \geq 1}$ é decrescente com limite 0. Prove também que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$.

(9) Se $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$ mostre que $|a_n - b_n| \rightarrow |a - b|$.

(10) Mostre que se $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de termos positivos e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(11) Mostre que as sequências abaixo convergem para 0, onde $a > 1$ e $k \in \mathbb{N}$.

$$(a) \ \left(\frac{n^k}{a^n} \right)_{n \geq 1};$$

$$(b) \ \left(\frac{a^n}{n!} \right)_{n \geq 1};$$

$$(c) \ \left(\frac{n!}{n^n} \right)_{n \geq 1}.$$

(12) Uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ satisfaz $7a_{n+1} = a_n^3 + 6$, para $n \geq 1$.

(a) Se $a_1 = \frac{1}{2}$, prove que $(a_n)_{n \geq 1}$ é crescente;

(b) Encontre seu limite;

(c) O que ocorre se $a_1 = \frac{3}{2}$ ou $a_1 = \frac{5}{2}$.

(13) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a, b > 0$. Mostre que

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \rightarrow \max\{a, b\}.$$

(14) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, sendo $a_{n+1} = \frac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}$, $n \geq 1$. A sequência é monótona?

(15) Considere a sequência de racionais $(a_n)_{n \geq 1}$ dada por

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right), \quad n \geq 1.$$

(a) Mostre que $a_n \geq \sqrt{3}$, $\forall n \geq 1$ (Utilize o fato de que a média aritmética entre dois números é sempre maior ou igual que a média geométrica);

(b) Mostre que $(a_n)_{n \geq 1}$ é monótona não crescente;

- (c) Conclua que $(a_n)_{n \geq 1}$ é de Cauchy porém não converge para um número racional.
- (16) Coloque **V** para as afirmações verdadeira e **F** para as falsas. Prove ou dê contra-exemplos em cada uma das afirmações.
- (a) () Toda sequência limitada é convergente.;
 - (b) () Toda sequência constante é de Cauchy;
 - (c) () A sequência $\sqrt{6}, \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \dots$ é convergente e seu limite é um número inteiro;
 - (d) () Seja (a_{n_j}) uma subsequência de (a_n) . Se $\lim a_{n_j} = a$ então $\lim a_n = a$;
 - (e) () A sequência $(a_n)_{n \geq 1}$, onde $a_n = \frac{n}{n+2}$, converge para 1.
- (17) O que significa dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente?
- (18) (a) Mostre que a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, com $|a| < 1$ converge;
- (b) Mostre utilizando uma série numérica que $0,666\dots = \frac{2}{3}$.
- (19) Considere a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k^n}$, onde k é uma constante real positiva. Discuta a convergência ou divergência da série em termos do parâmetro k .
- (20) Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, onde $a_n = \frac{2^n n! (1 - \cos n^2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n - 1)}$. Mostre que:
- (a) $0 \leq a_n \leq \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \dots (3n - 1)}$ para todo $n \geq 1$;
 - (b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- (21) Mostre que o termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ tem limite igual a zero. A série dada converge?
- (22) Considere a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ definida por
- $$a_1 = 3; \quad a_{n+1} = \frac{na_n}{2n+1}, \quad n \geq 1.$$
- (a) Mostre que $(a_n)_{n \geq 1}$ verifica as condições do Teorema da Convergência Monótona;
 - (b) Calcule o limite;
 - (c) O que se pode afirmar sobre a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(23) Sejam $(a_n)_{n \geq 1}$ e $(b_n)_{n \geq 1}$ duas seqüências de números reais satisfazendo as seguintes condições:

(i) A seqüência $(s_n)_{n \geq 1}$, definida para $n \in \mathbb{N}$ por $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, é limitada;

(ii) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots > 0$ e $b_n \rightarrow 0$.

(a) Prove que a série $\sum_{k \geq 1} a_k b_k$ converge.

(b) Utilize o item anterior para provar que a série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

(24) Verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$;

(c) $\sum_{n \geq 1} \frac{15n + \sqrt{n^2 - 1}}{5n^3 + 2n\sqrt{n+1} - 17}$;

(d) $\sum_{n \geq 1} \frac{n\sqrt{n+1}}{n^2 - 3}$;

(e) $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2 a^n}{2n^2}, \quad a \neq 0$;

(f) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(3n^2)}{n^2 - \sqrt{n+9}}$;

(g) $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

(25) Dado um número real $a > 1$, prove que a série $\sum_{k \geq 1} \frac{2k-1}{a^k}$ é convergente e calcule sua soma.

(26) Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ a seqüência de números reais positivos definida por $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Prove que a série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{a_k + 1}$ converge e

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{a_k + 1} = 2.$$

(27) A série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \cdots$$

possui termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende a zero. Entretanto é divergente. Por que isso não contradiz o Teste de Leibniz?

(28) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a+1}$.

(29) O número e é dado por

$$e = \lim \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Mostre que, de fato, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

(30) Seja A um conjunto finito de naturais da forma $2^a 3^b 5^c$, para algum terno (a, b, c) de inteiros não negativos. Prove que

$$\sum_{x \in A} \frac{1}{x} < 4.$$