UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Introdução à Álgebra*
Prof. *Victor Martins*

Prova 3 - 30/11/2018

(Questões sem justificativas não serão consideradas, portanto apresente as justificativas para cada solução.)

Nome:____Matrícula:__________

Questão 1: Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se} \quad x \geq 0, \\ 2x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{3+4x}{3-x}.$$

(a) *(0,5 pontos)* Mostre que f é sobrejetora.

(b) *(0,5 pontos)* Mostre que g é injetora.

(c) *(1,0 ponto)* Determine a função composta $f \circ g$.

Questão 2: *(2,0 pontos)*

(a) Seja $f : X \to Y$. Dados $A \subset Y$ e $B \subset Y$, mostre que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(b) Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser expressa como a soma de uma função par e uma função ímpar.

Questão 3: *(2,0 pontos)*

(a) Mostre que, se a operação $*$ sobre X tem um elemento neutro, então ele é único.

(b) Mostre que, se a operação $*$ sobre X é associativa, tem elemento neutro e e um elemento $a \in X$ é simetrizável, então a é regular.

Questão 4: *(2,0 pontos)* Sejam E e F dois conjuntos em que estão definidas as operações $*$ e $\triangle$, respectivamente, as quais são associativas e têm elementos neutros. Sobre o conjunto $E \times F$ definimos a operação $\circ$ por:

$$(a, b) \circ (c, d) = (a * c, b \triangle d).$$

(a) Mostre que $\circ$ é associativa e possui elemento neutro.

(b) Determine os elementos simetrizáveis de $E \times F$ para essa operação.

Questão 5:

(a) *(0,6 pontos)* Defina **semigrupo, monóide e grupo**.

(b) *(0,5 pontos)* Construa a tábua da adição para $\mathbb{Z}_5$.

(c) *(0,5 pontos)* Construa a tábua da multiplicação para $\mathbb{Z}_5$.

(d) *(1,2 pontos)* Mostre que $\mathbb{Z}_5$ é um grupo abeliano aditivo.

(e) *(1,2 pontos)* Mostre que $\mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_5 - \{\overline{0}\}$ é um grupo abeliano multiplicativo.

BOA PROVA!