

Prova 1 - Cálculo C / Cálculo Dif. e Int. II

11/09/2026

Questão 1:

a) V

Observe que o domínio de f é composto por todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 1$$

Ou seja, o domínio D de f é composto pelos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$x^2 + y^2 > 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Portanto, $E \subset D$.



b) F

Considere como contraexemplo $(a,b) = (0,0)$ e $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

As retas que passam por $(0,0)$ tem equação do tipo $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$. Utilizando esse caminho no cálculo do limite, temos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x}{x^2 + m^2} = 0$$

Entretanto, se considerarmos o caminho $y = x^2$, temos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ não existe, pela regra dos dois caminhos.

Questão 2:

a) Se f é uma função de duas variáveis tal que
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L_1$ ao longo de um caminho C_1 e
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L_2$ ao longo de um caminho C_2 e
 $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ não existe.

b)

(i) Resolvido no item (b) da questão 1.

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$

Para o caminho $x=0$, temos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0 + y^3} = 0$$

Para o caminho $y=x$, temos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pela regra dos dois caminhos o limite não existe.

$$(iii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$$

Para $x=0$, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Para $y=x$, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Pela regra dos dois caminhos o limite não existe.

$$(iv) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$$

Para $x=0$, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Para $y=x$, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Pela regra dos dois caminhos o limite não existe.

Questão 3:

a) f será contínua em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Utilizando coordenadas polares, temos:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$(x,y) \rightarrow (0,0) \Rightarrow x^2 + y^2 \rightarrow 0 \Rightarrow r^2 \rightarrow 0 \Rightarrow r \rightarrow 0^+$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \cos^2 \theta \cdot r \sin \theta}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \underbrace{r}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\cos^2 \theta}_{\text{função limitada}} \cdot \underbrace{\sin \theta}_{\text{função limitada}} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em $(0,0)$.

$$b) f(1,1) = \frac{1^2 \cdot 1}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$$

Portanto, f é contínua em $(1,1)$.

Questão 4:

a) $r^2 = 4z$

$r^2 = x^2 + y^2$, logo

$(x^2 + y^2 = 4z) \rightarrow$ Parabolóide elíptico

b) $\rho = 4 \cos \phi$

$\rho \cdot \rho = 4 \rho \cos \phi \Rightarrow \rho^2 - 4 \rho \cos \phi = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$

$\hookrightarrow$ (Elipsóide (esfera))
