



Prova Final - 04/09/2025

GABARITO

Questão 1:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

No produto $p!$ aparece o fator p . Nos fatoriais do denominador ($k!$ e $(p-k)!$) não aparece p , pois $k < p$ e $p-k < p$. Assim, ao simplificar a fração, sobra um fator p no numerador, o que mostra que $p \mid \binom{p}{k}$.

Questão 2:

(a) Em $\mathbb{Z}_6[x]$, se um polinômio $f(x)$ é inversível, então existe $g(x)$ tal que

$$f(x)g(x) = 1.$$

O grau do produto é $gr(f) + gr(g)$. Para o resultado ser constante (grau 0), ambos f e g devem ter grau 0. Logo, $f(x)$ é um polinômio **constante**.

Assim, as únicas unidades de $\mathbb{Z}_6[x]$ são as mesmas unidades de $\mathbb{Z}_6$, isto é, 1 e 5.

(b) Como $2 \cdot 3 = 0$ em $\mathbb{Z}_6$, temos divisores de zero. Em particular, em $\mathbb{Z}_6[x]$, $(2) \cdot (3) = 0$ (polinômios constantes), logo não é domínio de integridade.

Questão 3:

(a) Considere $f(x) = x^4 + 1$ e o polinômio trasladado $f(x+1) = (x+1)^4 + 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2$. Pelo critério de Eisenstein com $p = 2$: todos os coeficientes (exceto o líder) são divisíveis por 2, e o termo constante 2 não é divisível por 4. Logo $f(x+1)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$, e portanto $f(x)$ também é irredutível.

(b) Sobre $\mathbb{R}$, temos

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Questão 4:

(a) Pelo algoritmo da divisão, cada classe de equivalência possui representante único do tipo $a + bx$ com $a, b \in \mathbb{R}$ (redução módulo $x^2 + 1$).

- (b) Defina $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi(f(x)) = \varphi(a + bx) = a + bi$, onde $a + bx$ é o representante da classe de $f(x)$ no quociente do item (a). φ é um homomorfismo sobrejetor com $\ker \varphi = \mathbb{R}[x](x^2 + 1)$. Pelo Teorema do homomorfismo,

$$\mathbb{R}[x]/\mathbb{R}[x](x^2 + 1) \simeq \text{Im } \varphi = \mathbb{C}$$

Questão 5:

- (a) Fatora-se por x : $f(x) = x(x^2 - 2x + 1)$. Assim, $x \mid f(x)$.
- (b) Observando que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, temos $f(x) = x(x - 1)^2$. Logo

$$\frac{f(x)}{x - 1} = x(x - 1) = x^2 - x, \quad \text{com resto } 0.$$

- (c) A fatoração sobre $\mathbb{Q}$ é $f(x) = x(x - 1)^2$, produto de fatores lineares racionais; portanto já está em fatores irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$.