

Prova 1 - Álgebra Linear - 05/06/2025

Questão 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+3y+z=2 \\ x+2y+3z=3 \end{array} \right. \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \\ \Rightarrow \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y-z=0 \\ y+2z=2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2 \\ \Rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y-z=0 \\ 3z=2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}}$$

$$y - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}}$$

$$x + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$$

$$S = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

a) O sistema tem solução única

b) Cada equação representa um plano no espaço $\mathbb{R}^3$. Como o sistema tem solução única, isso significa que os três planos se interceptam exatamente em um único ponto.

———— // ————

Questão 2:

a) Note que,

$$\det A = 15 + 20 - 12 - 10 = 13 \neq 0,$$

logo A é inversível e portanto, existe A^{-1} .

Daí,

$$AX = B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Então o sistema tem solução única para qualquer vetor B .

b) Observe pelo item anterior que para um dado vetor B , a solução do sistema é $X = A^{-1}B$. Logo, precisamos determinar A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \\ \Rightarrow \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2 \\ \Rightarrow \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + 4L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -12 & 4 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow \frac{1}{13}L_3 \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{13} & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_3 \\ \Rightarrow \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 15/13 & -5/13 & 2/13 \\ 0 & 1 & 0 & 10/13 & 1/13 & -3/13 \\ 0 & 0 & 1 & -12/13 & 4/13 & 1/13 \end{pmatrix}$$

Dai,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 15/13 & -5/13 & 2/13 \\ 10/13 & 1/13 & -3/13 \\ -12/13 & 4/13 & 1/13 \end{pmatrix}$$

Então

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/13 & -5/13 & 2/13 \\ 10/13 & 1/13 & -3/13 \\ -12/13 & 4/13 & 1/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15/13 - 10/13 + 6/13 \\ 10/13 + 2/13 - 9/13 \\ -12/13 + 8/13 + 3/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/13 \\ 3/13 \\ -1/13 \end{pmatrix}$$

____ // ____

Questão 3:

a) suponha que $v = (a, b)$ seja o elemento neutro da adição definida.

Dai, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, devemos ter

$$(x, y) + (a, b) = (x, y) \Leftrightarrow$$

$$(x+a+1, y+b) = (x, y) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+a+1 = x \\ y+b = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = -1} \\ \boxed{b = 0} \end{cases}$$

Portanto, o elemento neutro é $v = (-1, 0)$.

b) $\mathbb{R}^2$ com essas operações não é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. De fato,

dados $a = 2$, $u = (1, 0)$, $v = (2, 0)$, se fosse espaço vetorial, deveríamos ter $a(u+v) = au + av$, mas

$$a(u+v) = 2((1, 0) + (2, 0))$$

$$= 2(1+2+1, 0)$$

$$= 2(4, 0) = (8, 0)$$

e

$$\begin{aligned} au + av &= 2(1, 0) + 2(2, 0) = (2, 0) + (4, 0) \\ &= (2+4+1, 0) \\ &= (7, 0), \end{aligned}$$

ou seja,

$$a(u+v) \neq au + av.$$

———— // —————

Questão 4:

a) (V) Seja A uma matriz quadrada simétrica, isto é, $A = A^t$.

Se A é inversível, existe A^{-1} tal que

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow$$

$$(A \cdot A^{-1})^t = I^t \Rightarrow$$

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = I$$

Logo A^t é inversível e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Como $A = A^t$, temos

$$A^{-1} = (A^{-1})^t$$

e portanto, A^{-1} é simétrica.

b) (F) Seja $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = BA = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mas}$$

$$\det(A+B) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4$$

$$\begin{aligned} \det A + \det B &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

c) (F)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = A, \text{ mas } \det A = -1$$

d) (F)

$$A = \begin{pmatrix} x & 3 & x \\ 2 & x & 2 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = x^2 + 6 + 2x^2 - x^2 - 2x^2 - 6 \\ = 0$$

Logo, independente do valor de x ,
 $\det A = 0$ e consequentemente, A não
é invertível.

———— // ————

