



Disciplina: *Introdução à Álgebra*

Prof. *Victor Martins*

Lista 4: Relações

(1) Sejam $R \subset U \times U$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e R definido por $1R3, 2R4, 3R5$. Determine:

- (a) o domínio e imagem de R ;
- (b) uma sentença que define R .

(2) Seja $R \subset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ e R definida por

$$xRy \Leftrightarrow y = x + 3.$$

Determine $D(R)$ e $Im(R)$.

(3) Determine o domínio, a imagem e represente no plano cartesiano o gráfico das seguintes relações:

- (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y \leq 15\}$
- (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = |y|\}$
- (c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 16\}$
- (d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 16\}$
- (e) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \geq 16\}$

(4) Se $R \subset U \times U$, $D(R) = U$, $Im(R) = U$, então $R = U \times U$?

(5) Sabe-se que X é um conjunto com 5 elementos e $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e)\}$ é uma relação sobre X . Determine:

- (a) os elementos de X ;
- (b) o Domínio e a Imagem de R ;
- (c) os elementos, o domínio e a imagem de R^{-1} ;
- (d) o esquema de flechas de R .

(6) Seja R a relação sobre o conjunto $\mathbb{N}^*$ definida pela sentença $x + 3y = 10$. Determine:

- (a) os elementos de R ;

- (b) o Domínio de R ;
 - (c) a Imagem de R ;
 - (d) os elementos de R^{-1} ;
- (7) Dadas as relações R_1, R_2, R_3 em $\mathbb{Q}$ definidas, respectivamente, por: “ $x = y$ ”, “ $y = x + 1$ ” e “ $y = x + 2$ ”, determine:
- (a) os gráficos das relações;
 - (b) $R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1}$;
 - (c) R_1^C, R_2^C ;
 - (d) os gráficos de $R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cup R_2 \cup R_3$.
- (8) Prove que:
- (a) $D(R^{-1}) = Im(R)$;
 - (b) $D(R) = Im(R^{-1})$.
- (9) Prove que

$$(xRy \Leftrightarrow xR^{-1}y) \Rightarrow R \text{ é simétrica.}$$

- (10) Sejam A e B dois conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente.

- (a) Qual é o número de elementos de $A \times B$?
- (b) Qual é o número de relações de A em B ?

- (11) Seja R uma relação binária sobre o conjunto A e R' a negação de R , isto é $R' = \{(x, y) : x \text{ não se relaciona com } y\}$. O que pode se concluir sobre $R \cap R'$ e $R \cup R'$?
- (12) Seja $X = \{1, 2, 3\}$. Considere as seguintes relações em X :

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

$$R_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$R_4 = X \times X$$

$$R_5 = \emptyset$$

Quais são reflexivas? E simétricas? E transitivas? E antissimétricas?

- (13) $\emptyset \subset A \times A$, logo $\emptyset$ é uma relação em A . É de equivalência?

- (14) Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

- (a) Represente no plano cartesiano os pontos da seguinte relação em X :

$$\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}.$$

(Esse conjunto é conhecido como *diagonal* do conjunto X .)

- (b) Mostre que Δ_X é uma relação de equivalência sobre X .
- (c) Seja S_0 uma relação de equivalência sobre X com a propriedade de estar contida em qualquer outra relação de equivalência sobre X . Mostre que $S_0 = \Delta$. [Dica: basta mostrar que $\Delta_X \subset S_0$.]
- (d) Mostre que $X \times X$ é uma relação de equivalência sobre X .

- (15) (a) Seja

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \text{existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \frac{x}{y} = 3^n\}.$$

Mostre que S satisfaz as propriedades simétrica e transitiva, mas não satisfaz a propriedade reflexiva (atenção: o problema não é o número 3 na base da potência)

- (b) Sejam X um conjunto não vazio e S uma relação sobre X que satisfaça as propriedades simétrica e transitiva. O raciocínio a seguir “demonstra” que uma relação que seja simétrica e transitiva é também reflexiva.

Sejam $x, y \in X$, se $(x, y) \in S$, pela propriedade simétrica, concluímos que $(y, x) \in S$. Usando agora a propriedade transitiva com os pares $(x, y) \in S$ e $(y, x) \in S$, vemos que $(x, x) \in S$. Assim, S é reflexiva.

O item (a) desta questão é um exemplo de que esse raciocínio está errado. Encontre o erro.

- (16) Dados os conjuntos X e $S \subset X \times X$ a seguir, demonstre que S é uma relação de equivalência sobre X ou explique qual a propriedade que falta para não ser uma relação de equivalência.

- (a) $X = \mathbb{Z}$, $R = \{(a, b) \in X \times X : a - b \text{ é múltiplo de } 3\}$
- (b) $X = \{\text{retas do plano cartesiano}\}$, $R = \{(a, b) \in X \times X : a \text{ é paralela a } b\}$
- (c) $X = \{\text{retas do plano cartesiano}\}$, $R = \{(a, b) \in X \times X : a \text{ é perpendicular a } b\}$
- (d) $X = \{\text{pontos do plano cartesiano, exceto a origem}\}$, $R = \{(a, b) \in X \times X : a \text{ pertence a reta que passa pela origem e por } b\}$
- (e) $X = \{\text{pessoas do mundo que têm alguma profissão}\}$, $R = \{(a, b) \in X \times X : a \text{ tem a mesma profissão que } b\}$
- (f) $X = \{\text{pessoas desta faculdade}\}$, $R = \{(a, b) \in X \times X : a \text{ é amigo de } b\}$
- (g) $X = \mathbb{R}$, $R = \{(a, b) \in X \times X : a \geq b\}$

(17) Seja R a relação sobre $\mathbb{Q}$ definida da seguinte forma:

$$xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

- (a) Prove que R é uma relação de equivalência.
 - (b) Descreva a classe $\overline{100}$.
 - (c) Descreva a classe $\overline{0, 5}$.
- (18) Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Faça o que se pede em cada item e desenhe os diagramas de flechas.
- (a) Dê exemplos de relações sobre X que sejam simétricas e antissimétricas ao mesmo tempo.
 - (b) Dê exemplos de relações sobre X que sejam simétricas e não sejam antissimétricas.
 - (c) Dê exemplos de relações sobre X que não sejam simétricas e sejam antissimétricas.
 - (d) Dê exemplos de relações sobre X que não sejam simétricas e nem antissimétricas.
- (19) Pode acontecer de uma relação de equivalência ser também uma relação de ordem parcial (ou total)? Se sim, construa exemplos e, caso contrário, justifique.
- (20) Considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 50\}$. Defina sobre X a seguinte relação:

$$R = \{(a, b) \in X \times X : a - b \text{ é múltiplo de } 4\}.$$

- (a) Mostre que R é uma relação de equivalência.
 - (b) Descreva as classes de equivalência e escreva o conjunto quociente X/R .
- (21) As relações definidas a seguir são de equivalência. Determine o que se pede em cada caso.
- (a) $S = \{(a, b) \in X \times X : a - b \text{ é múltiplo de } 5\}$, onde $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, 30\}$.
Descreva as classes de equivalência e obtenha o conjunto quociente X/S .
 - (b) $S = \{(a, b) \in X \times X : a - b \text{ é múltiplo de } 6\}$, onde $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, 35\}$.
Descreva as classes de equivalência e obtenha o conjunto quociente X/S .

(22) Seja $X = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 20\}$ e defina sobre X a relação

$$S = \{(x, y) \in X \times X : \text{existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x - y = 4n\}.$$

Determine o conjunto quociente X/S .

- (23) Seja S uma relação de equivalência definida sobre um conjunto não vazio X . Sejam $x, y \in X$. Demonstre que as afirmações a seguir são equivalentes:
- (i) xSy ;

- (ii) $x \in \overline{y}$;
- (iii) $y \in \overline{x}$;
- (iv) $\overline{x} = \overline{y}$.

(24) Verifique que cada um dos conjuntos a seguir é totalmente ordenado segundo a relação de divisibilidade.

- (a) $X = \{1, 18, 3, 6\}$
- (b) $X = \{4, 16, 5\}$
- (c) $X = \{-1, 1, -5, 5, -20, 20\}$
- (d) $X = \mathbb{Z}$

(25) Seja X um conjunto não vazio e seja $\mathcal{P}$ uma família de subconjuntos de X . Defina sobre $\mathcal{P}$ a relação de inclusão dada por $S = \{(F_1, F_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : F_1 \subset F_2\}$, onde F_1, F_2 são elementos em $\mathcal{P}$.

- (a) Mostre que S é reflexiva.
- (b) Mostre que S é antissimétrica.
- (c) Mostre que S é transitiva.
- (d) Verifique se S é uma relação de ordem total sobre $\mathcal{P}$.

(26) Considere $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e defina relação

$$S = \{((x, y), (z, t)) \in X \times X : x \text{ divide } z \text{ e } y \leq t\}$$

sobre X , em que o símbolo $\leq$ é a desigualdade “menor que ou igual a” no sentido usual.

- (a) Demonstre que S satisfaz a propriedade reflexiva.
- (b) Demonstre que S satisfaz a propriedade antissimétrica.
- (c) Demonstre que S satisfaz a propriedade transitiva.
- (d) Discuta porque S é uma relação de ordem parcial, mas não total sobre X .

(27) **Ordem Lexicográfica.** Considere $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e sejam $x = a + bi$, $y = c + di$ dois de seus elementos, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Defina sobre $\mathbb{C}$ a seguinte relação:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : a < c \text{ ou } (a = c \text{ e } b \leq d)\},$$

onde o símbolo $\leq$ é a desigualdade “menor que ou igual a” no sentido usual.

- (a) Demonstre que S satisfaz a propriedade reflexiva.

- (b) Demonstre que S satisfaz a propriedade antissimétrica.
 - (c) Demonstre que S satisfaz a propriedade transitiva.
 - (d) Demonstre que S é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{C}$.
- (28) Seja $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x^2 \leq 2\}$ um subconjunto de $\mathbb{Q}$, em que se considera a relação de ordem habitual. Determine os limites superiores, os limites inferiores, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A .
- (29) Considere a relação R definida em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a|c \text{ e } b \leq d.$$

- (a) Prove que R é uma relação de ordem parcial.
- (b) Determine os limites superiores, os limites inferiores, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A = \{(1, 2), (2, 1)\}$.