



Disciplina: *Álgebra Linear II*  
Prof. *Victor Martins*

## Lista 7: Produto Interno

- (1) Seja  $V$  um espaço com produto interno e considere a norma  $\|\cdot\|$  proveniente do produto interno.
- (a) (*Lei do paralelogramo*) Mostre que  $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ , para quaisquer  $u, v \in V$ .
- (b) Mostre que  $u - v$  é ortogonal a  $u + v$  se, e somente se  $\|u\| = \|v\|$ .
- (2) (a) Seja  $W$  um subespaço de  $V$  e  $V$  um espaço com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Mostre que a restrição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $W \times W$  é um produto interno em  $W$ .
- (b) Seja  $T \in \mathfrak{L}(U, V)$  injetora. Mostre que se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto interno em  $V$  então  $(\cdot | \cdot)$  definido por  $(u | v) = \langle T(u), T(v) \rangle$  é um produto interno em  $U$ .
- (3) (*Desigualdade de Bessel*) Seja  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  um subconjunto ortonormal de  $V$ . Mostre que

$$\sum_{j=1}^n |\langle v, v_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

para todo  $v \in V$ . A igualdade vale se, e somente se,  $v \in \langle \mathcal{B} \rangle$ .

- (4) (a) Mostre que  $\|u + v\| \leq \|u + w\| + \|w - v\|$  para quaisquer  $u, v, w$  num espaço normado  $V$ .
- (b) Seja  $V$  um espaço euclidiano. Mostre que, se  $\langle u, v \rangle = 0$  para todo  $v \in V$  então  $u = 0$ .
- (c) Sejam  $V$  um espaço euclidiano e  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ . Se  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  são escalares, mostre que, para cada  $\alpha_i$ , existe um único vetor  $u_i \in V$  tal que  $\langle v_i, u_i \rangle = \alpha_i$ .
- (5) Considere o espaço vetorial das funções reais contínuas no intervalo  $[0, 2\pi]$ , com produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^{2\pi} p(t)q(t)dt,$$

e norma proveniente dele.

- (a) Mostre que  $\sin x$  e  $\cos x$  são ortogonais.

- (b) Normalize os vetores  $\sin x$  e  $\cos x$  usando a norma proveniente do produto interno.
  - (c) Mostre que  $\sin x$  é ortogonal a  $\cos 2x$  e a  $\cos 3x$ .
- (6) Mostre que se  $V$  é um espaço euclidiano sobre  $\mathbb{R}$ , a aplicação  $\phi : V^* \rightarrow V$  dada por  $\phi(f) = y$ , onde  $f(x) = \langle x, y \rangle$ , para todo  $x \in V$ , é um isomorfismo entre  $V^*$  e  $V$ .
- (7) Seja  $V = P(\mathbb{R})$  o espaço dos polinômios com coeficientes reais. Considere o produto interno definido em  $C([-1, 1], \mathbb{R})$  por

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

Seja  $\mathfrak{B} = \{1, t, t^2, \dots\}$  base de  $P(\mathbb{R})$ . Encontre os 4 primeiros termos da base  $\{p_1, p_2, \dots\}$  obtida ao se aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base  $\mathfrak{B}$ . Os polinômios  $p_n(t)$  são os *polinômios de Legendre*, que são úteis no estudo de equações diferenciais.

- (8) Sejam  $U$  e  $V$  espaços com produto interno e  $T : U \rightarrow V$  uma aplicação. Uma aplicação  $T^* : V \rightarrow U$  é **adjunta** de  $T$  se satisfizer

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle, \quad \forall x \in U, y \in V.$$

Mostre que, se  $U$  e  $V$  são espaços euclidianos, então existe a adjunta de uma aplicação linear  $T : U \rightarrow V$ .

- (9) Seja  $V = P(\mathbb{R})$ .

- (a) Mostre que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definido por  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$  é um produto interno em  $V$ .
- (b) Sejam  $W = P_1(\mathbb{R}) \leq V$  e  $f \in W^*$  tal que  $f(p) = p(2)$ . Encontre  $q \in W$  tal que  $f(p) = \langle p, q \rangle$ .
- (c) Se  $f \in V^*$  é definido por  $f(p) = p(2)$  então existe  $q \in V$  tal que  $f(p) = \langle p, q \rangle$ ?

- (10) Sejam  $U$  e  $V$  espaços euclidianos e  $M : U \rightarrow V$  uma aplicação.  $M$  é uma **isometria** se, para quaisquer  $x, y \in U$ , tivermos

$$\|M(x) - M(y)\| = \|x - y\|.$$

Se  $M$  é uma isometria linear, mostre que:

- (a)  $M$  é injetora;
- (b)  $M$  preserva o produto interno.

- (11) Sejam  $W_1, W_2$  subespaços do espaço com produto interno  $V$ . Mostre que:

- (a)  $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ ;
- (b)  $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$ ;