NOTAS DE AULA

Análise Matemática

Prof. Victor do Nascimento Martins

ALEGRE/ES
SETEMBRO/2020

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

Conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis. Números Reais. Sequências e séries reais. Sequências de Cauchy. Topologia da reta. Limite de funções. Funções Contínuas.

Horas	Tópico
10	**Conjuntos finitos e infinitos** Números naturais Axiomas de Peano Princípio da boa ordenação Conjuntos enumeráveis
12	**Números reais** $\mathbb{R}$ é um corpo $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado Valor absoluto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo arquimediano
12	**Sequências e séries** Sequências de números reais Sequências convergentes, sequências monótonas, sequência de Cauchy Séries numéricas. Testes de convergência
6	**Noções topológicas** Conjuntos abertos, conjuntos fechados, conjuntos compactos
12	**Funções** Limites de funções Funções contínuas Continuidade uniforme

SUMÁRIO

Prefácio **1**

Introdução **2**
Exercícios de revisão 3

1 Conjuntos finitos e infinitos **6**
1.1 Números naturais 6
1.1.1 Axiomas de Peano 7
1.1.2 Princípio da boa ordenação 10
1.2 Conjuntos enumeráveis 11
1.3 Exercícios 16

2 Números reais **19**
2.1 $\mathbb{R}$ é um corpo 20
2.2 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado 22
2.3 Valor absoluto 25
2.4 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo arquimediano 26
2.5 Exercícios 32

3 Sequências e séries **36**
3.1 Sequências de números reais 36
3.1.1 Sequências convergentes 38
3.1.2 Sequências monótonas 41
3.1.3 Sequência de Cauchy 43
3.1.4 Limites e desigualdades 45
3.1.5 Mais alguns exemplos 46
3.2 Séries numéricas 50

3.2.1 Testes de convergência 53
3.3 Exercícios 57

4 Noções topológicas **63**
4.1 Exercícios 68

5 Funções **70**
5.1 Limites de funções 70
5.2 Funções contínuas 74
5.3 Continuidade uniforme 80
5.4 Exercícios 82

Sugestões e soluções **85**

Referências Bibliográficas **91**

PREFÁCIO

O propósito dessas notas de aula é fornecer um material de apoio sucinto e objetivo para a disciplina de *Análise Matemática* que compõe a grade de disciplinas obrigatórias do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, campus de Alegre. Sendo assim, o principal foco foi cobrir todo conteúdo de tal disciplina, e portanto, tópicos comuns de análise real, como derivadas e a integral de Riemann não serão contemplados neste material, por não fazerem parte da ementa da disciplina em questão.

Ressaltamos que para uma melhor compreensão do conteúdo e um aprofundamento maior dos tópicos aqui apresentados, o aluno deverá, sempre que possível, consultar as referências bibliográficas indicadas.

Essas notas foram iniciadas após a primeira experiência do autor ministrando a disciplina no primeiro semestre de 2019 e sua necessidade mais imediata se deu devido a aprovação de um semestre emergencial de ensino remoto na UFES a partir de setembro de 2020 em função da pandemia causada pelo corona vírus e que impossibilitou a continuidade do ensino presencial.

É importante ressaltar ainda que este material estará sempre em construção, portanto, quaisquer correções, sugestões e comentários serão bem recebidos a fim de tornar o mais completo possível, visando atender aos estudantes da disciplina.

Alegre, setembro de 2020.

Victor Martins

INTRODUÇÃO

No curso de Análise Real temos por objetivo revisitar os conceitos desenvolvidos no Cálculo Diferencial e Integral. Após um primeiro estudo dos conceitos básicos nos cursos de cálculo, existe uma necessidade de obter formulações mais rigorosas e precisas das ideias intuitivas até então vistas. Em resumo, buscamos fazer um estudo dos números reais e das funções reais.

Neste curso, nosso objetivo é fazer uma pequena introdução de um curso de Análise Real em uma Variável. Com isso, temos como meta o estudo das funções contínuas. Iremos brevemente apresentar a definição de conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis, apresentaremos o conjunto dos números reais concluindo que este, é um corpo ordenado completo arquimediano. Alguns conceitos topológicos serão definidos e apresentados, especialmente com o objetivo de apresentar a definição de continuidade utilizando conjuntos abertos. Também estudaremos sequências e séries e utilizaremos as sequências para apresentar a definição qualitativa de continuidade.

A respeito do rigor matemático é importante salientar que diferente de uma disciplina de cálculo estaremos mais interessados nos detalhes das definições, construções, demonstrações e resultados. Neste sentido é importante diferenciarmos alguns termos comuns no contexto matemático: axiomas, proposições, teoremas, lemas, corolários.

- **Proposição:** é uma sentença declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa. A prova costuma ser simples e tende a ter uma importância menor;

- **Axioma:** é uma sentença ou proposição que não é demonstrada. É considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para construção de uma teoria. É aceita como verdade inicial e assim, utilizada para dedução de novas verdades. Pode-se facilmente nomear um axioma como um postulado ou uma hipótese;

- **Teorema:** é uma proposição com valor mais reconhecido em matemática. Tem maior importância;
- **Lema:** ou pré-teorema, é uma proposição que serve para provar um teorema. Lema e teorema às vezes se confundem, depende do autor e do contexto. Alguns lemas importantes servem para provar mais de um resultado, como por exemplo o *Lema de Gauss* ou o *Lema de Zorn*;
- **Corolário:** é uma consequência imediata de um teorema ou definição.

Provar teoremas é a principal atividade de matemáticos e justificar os resultados é o trabalho no curso de Análise.

Apesar de poucos pré-requisitos oficiais para se cursar a disciplina de Análise Matemática, subentende-se que existe quase um curso todo de base. Logo conceitos e resultados de outras disciplinas devem e serão utilizados o tempo todo neste material. Neste sentido inciamos com uma breve lista de exercícios de revisão de alguns conceitos básicos de matemática.

Exercícios de revisão

(1) Assinale **V** para verdadeiro e **F** para falso:

(a) ( ) $3 = \{3\}$;
(b) ( ) $0 \in \emptyset$;
(c) ( ) $3 \in \{3\}$;
(d) ( ) $0 = \emptyset$;
(e) ( ) $5 \in \{\{5\}\}$;
(f) ( ) $4 \in \{\{4\}, 4\}$;
(g) ( ) $3 \subset \{3\}$;
(h) ( ) $\emptyset \in \{3\}$;
(i) ( ) $\{3, 4\} \subset \{\{3, 4\}, \{5, 6\}\}$;
(j) ( ) $\{2, 8\} \subset \{2, 8, 9\}$.

(2) Sejam $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e denote por $\wp(X)$ o conjunto das partes de um conjunto X dado. Determine:

(a) $\wp(A)$;
(b) $\wp(B)$;

(c) $\wp(C)$;

(d) $\wp((A \cup B) \cap C)$.

(3) Sejam $A = \{x : x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x^2 - 1 > 0\}$ e $B = \{x : x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x + 1 > 0\}$. Determine:

(a) $A \cup B$;

(b) $A^C \cap B$;

(c) $A \cap B^C$;

(d) $A^C \cup B^C$;

(e) $A^C \cap B^C$.

(4) Mostre que:

(a) $A \cup (B - A) = A \cup B$;

(b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^C = \emptyset$.

(5) Mostre que $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo.

(6) Dados uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, a **imagem direta** de X, denotada por $f(X)$ é o conjunto $f(X) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), \quad \text{para algum} \quad x \in X\}$ e a **imagem inversa** de Y, denotada por $f^{-1}(Y)$ é o conjunto $f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in Y\}$. Mostre que se $A, B \subset \mathbb{R}$ então:

(a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(7) ***Função par.*** Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ é dita uma *função par* se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in X$. Verifique se as funções a seguir são pares:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2 + 7$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^3$.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4\text{sen}\, x$.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{\cos x}{8}$.

(8) ***Função ímpar.*** Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ é dita uma *função ímpar* se $-f(x) = f(-x)$, para todo $x \in X$. Verifique se as funções a seguir são ímpares:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = 3x^2 + 1$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{2}$.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 8\cos x$.

(9) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Mostre que:

(a) a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma função par;

(b) a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma função ímpar;

(c) a função $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $j(x) = \dfrac{f(x) \cdot f(-x)}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma função par;

(10) Faça o que se pede em cada item a seguir:

(a) Mostre que a soma de dua funções pares produz uma função par.

(b) Mostre que a soma de duas funções ímpares produz uma função ímpar.

(c) Mostre que o produto de duas funções pares produz uma função par.

(d) Mostre que o produto de duas funções ímapares produz uma função par.

(11) Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser expressa como a soma de uma função par e uma função ímpar.

(12) Dados dois conjuntos não vazios A e B, define-se o **produto cartesiano** de A e B, denotado por $A \times B$, como sendo o conjunto dos pares ordenados com primeira coordenada em A e segunda coordenada em B, isto é,

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \quad \text{e} \quad b \in B\}.$$

Mostre que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Uma das noções mais importantes em matemática é a de conjunto. É algo presente direta ou indiretamente em todas as definições matemáticas. Neste capítulo apresentamos as definições de conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis. Para isso, iniciaremos falando do conjunto dos números naturais. Para uma breve introdução sobre conjuntos sugerimos [6] e para uma breve revisão das técnicas de demonstrações e notações mais usuais em matemática sugerimos o capítulo 1 de [1].

1.1 Números naturais

No século XX houve no mundo todo um movimento conhecido como o *Movimento da Matemática Moderna*. Tratava-se se um movimento internacional no ensino de matemática que se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da matemática. Basicamente, acreditavam que a matemática necessitava de uma organização mais rígida, formal. Neste sentido, antes mesmo deste movimento estar estabelecido diversos trabalhos de matemáticos dedicados aos números, em particular os naturais, tinham o objetivo de "organizar", os números naturais, ou seja, obter uma construção mais formal deste conjunto. O trabalho mais aceito e polido se deve a Giussepe Peano[1] (1858 - 1932). Ele mostrou que poucos fatos seriam necessários para construir toda a teoria dos números naturais.

Apresentaremos de maneira objetiva o conjunto dos números naturais. Ignoraremos, de certa forma, nossos conhecimentos prévios sobre este conjunto a fim de compreendermos a constatação de Giussepe Peano de que a partir de poucos fatos podemos construir toda a teoria dos números naturais, fatos estes conhecidos como axiomas de Peano. Para uma

[1] Giussepe Peano foi um matemático italiano conhecido principalmente por ter estabelecido um tratamento axiomático ao conjunto dos naturais e por ser o fundador da lógica simbólica.

apresentação mais detalhada deste conjunto sugerimos a leitura do capítulo 1 de [7].

Inicialmente consideremos três conceitos primitivos:

- Um conjunto cujos elementos são chamados números naturais;
- 1 é um elemento do conjunto dos números naturais;
- Uma função que para cada n no conjunto dos números naturais associa um outro elemento no mesmo conjunto chamado de **sucessor** de n.

1.1.1 Axiomas de Peano

(P1) Dois números naturais que tiverem sucessores iguais são também iguais;

(P2) 1 não é sucessor de nenhum número natural;

(P3) **(Princípio de indução)** Se S é uma coleção de números naturais tal que

(i) 1 está em S;

(ii) O sucessor de cada elemento de S também está em S.

Então S é o conjunto dos números naturais.

Introduziremos as seguintes notações matemáticas para facilitar a escrita dos axiomas de Peano:

$\mathbb{N} \rightsquigarrow$ conjunto dos números naturais;
$\in \rightsquigarrow$ está em;
$n^+ \rightsquigarrow$ sucessor de n.

Assim, podemos reescrever os axiomas de Peano da seguinte maneira:

(P1) $\forall\ a, b \in \mathbb{N} :\ a^+ = b^+ \quad \Rightarrow \quad a = b$;

(P2) $1 \neq a^+, \quad \forall\ a \in \mathbb{N}$;

(P3) $\begin{array}{l} S \subset \mathbb{N} \\ (i)\ 1 \in S \\ (ii)\ a \in S \Rightarrow a^+ \in S \end{array} \quad \Rightarrow \quad S = \mathbb{N}.$

Vamos definir em $\mathbb{N}$ uma operação de **adição** da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (a, b) & \mapsto & a + b \end{array}$$

(i) $a + 1 = a^+$

(ii) $a + b^+ = (a + b)^+$

A definição acima é uma definição **indutiva**, utilizaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} &1 + 1 = 1^+ = 2 \\ &1 + 2 = 1 + 1^+ = (1 + 1)^+ = 2^+ = 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Uma demonstração em matemática na qual utilizamos o axioma (P3) é chamada uma **demonstração por indução** e seu uso mais comum é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 1.1 (Princípio de indução) *Seja $P(n)$ uma afirmação a respeito dos números naturais tal que*

(i) $P(1)$ é verdadeira;

(ii) Sempre que $P(k)$ for verdadeira, então $P(k + 1)$ é verdadeira para todo $k \geq 1$.

Então $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $X = \{n \in \mathbb{N} : \ P(n) \quad \text{é verdadeira}\}$.
Note que $X \subset \mathbb{N}$ por construção e além disso, $1 \in X$, pois por (i), $P(1)$ é verdadeira.
Seja $a \in X$, daí $a \in \mathbb{N}$ e $P(a)$ é verdadeiro. Logo por (ii), $P(a^+)$ é verdadeira e daí $a^+ \in X$.
Assim pelo axioma (P3), $X = \mathbb{N}$. Isso significa que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Podemos definir, também de maneira indutiva, a multiplicação em $\mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (a, b) & \mapsto & a \cdot b \end{array}$$

(i) $a \cdot 1 = a$

(ii) $a \cdot b^+ = a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$

As operações de adição e multiplicação nos naturais satisfazem as seguintes propriedades:

- **Associatividade**: Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} &(a + b) + c = a + (b + c) \\ &(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

- **Comutatividade**: Para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ temos

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

- **Lei do cancelamento**: Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$ temos

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c$$
$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$$

- **Distributividade**: Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$ temos

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- **Tricotomia**: Dados $a, b \in \mathbb{N}$ exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $a = b$, ou existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + c$, ou, então, existe $d \in \mathbb{N}$ com $b = a + d$.

Dados dois números naturais a e b, escrevemos $a < b$ quando existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + c$. Dizemos, neste caso que a **é menor que** b. Assim, a tricotomia pode ser reescrita da seguinte maneira: *dados* $a, b \in \mathbb{N}$*, uma e somente uma das três alternativas ocorre:*

$$\text{ou} \quad a < b, \quad \text{ou} \quad a = b, \quad \text{ou} \quad b < a.$$

A seguir vamos demonstrar uma das propriedades acima, a associatividade da adição.

Proposição 1.1 *A adição em* $\mathbb{N}$ *é associativa, isto é, dados* $a, b, c \in \mathbb{N}$*, tem-se* $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Demonstração: Fazendo indução sobre c temos, para $c = 1$

$$(a + b) + 1 = (a + b)^+ = a + b^+$$
$$a + (b + 1) = a + b^+$$

e temos nosso primeiro passo de indução verificado.

Agora suponha por hipótese de indução que tenhamos válido o seguinte

$$(a + b) + k = a + (b + k), \quad \text{para algum} \quad k > 1.$$

Daí

$$(a + b) + k^+ = [(a + b) + k]^+ \underbrace{=}_{H.I} [a + (b + k)]^+ = a + (b + k)^+ = a + (b + k^+).$$

■

1.1.2 Princípio da boa ordenação

Seja X um conjunto de números naturais. Um número $a \in X$ é dito o **menor elemento** de X (ou **elemento mínimo** de X) quando $a \leq n$($a < n$ ou $a = n$), para todo $n \in X$.

É claro que, o menor elemento de um conjunto é único. De fato, se $p, q \in X$ são menores elementos de X então $p \leq q$ e $q \leq p$, logo $p = q$.

Teorema 1.2 (PBO) *Todo conjunto não vazio $S \subset \mathbb{N}$ possui menor elemento.*

Demonstração: Seja $S \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não vazio e defina

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{ para todo } \quad a < n, a \in \mathbb{N} \quad \text{então} \quad a \notin S\}.$$

Considere a afirmação sobre os números naturais

$$P(n) : n \in A.$$

Note que $P(1)$ é verdadeiro. Afirmamos ainda que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$ é verdadeiro, mas $P(k+1)$ não é verdadeiro, e, neste caso, k será o menor elemento de S. De fato, se para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$ é verdadeiro tivéssemos $P(k+1)$ verdadeiro, então pelo princípio de indução teríamos que $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, teríamos $A = \mathbb{N}$ e daí $S = \emptyset$, um absurdo. ■

Teorema 1.3 *Não existe número natural entre 1 e 2.*

Demonstração: Defina

$$S = \{x \in \mathbb{N} : \ 1 < x < 2\}.$$

Por construção $S \subset \mathbb{N}$. Agora suponha $S \neq \emptyset$, daí pelo PBO existe n menor elemento de S. Como $n \neq 1$, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a^+ = n$. Logo $a < n$ e pela minimalidade de n em S, segue que $a = 1$ ou $a \geq 2$.

Se $a = 1$, então $a^+ = 2$ e daí $n \notin S$, que é uma contradição ao fato de n ser menor elemento de S. Por outro lado, se $a \geq 2$, temos $1 < n = a^+ < 2 \leq a$, um absurdo, pois $a^+ > a$. Portanto $S = \emptyset$ e daí não existem naturais entre 1 e 2. ■

Corolário 1.1 *Dado $a \in \mathbb{N}$, não existe número natural entre a e a^+.*

Demonstração: Se $a = 1$, o resultado foi provado no teorema anterior. Se $a > 1$ então $a - 1 \geq 1$ e daí se existisse $m \in \mathbb{N}$ tal que $a < m < a^+$, implicaria na existência do natural $(m - (a - 1))$ entre 1 e 2, contrariando o teorema anterior. ■

1.2 Conjuntos enumeráveis

Pode-se dizer que a teoria axiomática dos conjuntos começou com Georg Cantor[2] (1845 - 1918) por volta de 1872. Ele provou que o conjunto dos racionais tem uma infinidade de elementos a menos que os reais. Ou seja, ele provou que o infinito de racionais é "menor" que o infinito de reais. Isso o levou a investigar conjuntos infinitos em geral, em particular, quanto a sua cardinalidade, que discutiremos brevemente nesta seção. Para mais detalhes veja [1] e sugerimos também o capítulo 4 de [3] que apresenta algumas demonstrações de maneira mais didática.

Sugerimos fortemente que, antes de prosseguir os estudos com os formalismos matemáticos envolvendo a enumerabilidade de conjuntos, seja feita uma leitura do artigo *"Contando infinitos"* do professor Ledo Vaccaro Machado. No texto, o professor Ledo apresenta todo o conteúdo que discutiremos nesta seção de uma maneira lúdica e extremamente didática. A leitura deste artigo, portanto, facilitará a compreensão das definições formais que serão apresentadas a seguir.

Definição 1.1 *Dizemos que os conjuntos A e B possuem a mesma* ***cardinalidade*** *se existir uma aplicação bijetiva $f : A \to B$. Neste caso, escrevemos $|A| = |B|$.*

A cardinalidade de A é menor ou igual a cardinalidade de B se existir uma aplicação injetiva $f : A \to B$, e daí escrevemos $|A| \leq |B|$.

Teorema 1.4 (Cantor) *Qualquer que seja o conjunto A tem-se $|A| < |\mathscr{P}(A)|$, em que $\mathscr{P}(A)$ é o conjunto das partes de A.*

O teorema acima nos diz que, dado um conjunto A, sempre existe outro conjunto com cardinalidade maior que a de A, uma vez que, não existe aplicação sobrejetiva de A em $\mathscr{P}(A)$, que também seja injetiva.

Seja $I_n = \{p \in \mathbb{N} : \ p \leq n\}$, um conjunto X diz-se **finito** quando é vazio ou existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|X| = |I_n|$. Neste caso, a cardinalidade de X é n. O conjunto X é **infinito** se não for finito, ou seja, se ele contém um subconjunto que está em correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$.

Lema 1.1 *Se existe uma bijeção $f : X \to Y$ então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe também uma bijeção $g : X \to Y$ tal que $g(a) = b$.*

Demonstração: Seja $b' = f(a)$. Como f é sobrejetora, existe $a' \in X$ tal que $f(a') = b$. Defina $g : X \to Y$ por $g(a) = b$, $g(a') = b'$ e $g(x) = f(x)$ se $x \in X \setminus \{a, a'\}$. É claro que g é uma bijeção. ■

[2]Georg Cantor foi um matemático nascido na Rússia, mas tendo vivido na Alemanha a maior parte da sua vida. Entre suas diversas contribuições matemáticas destaca-se a elaboração de teoria de conjuntos.

Teorema 1.5 *Se A é um subconjunto próprio de I_n, não pode existir uma bijeção $f : A \to I_n$.*

Demonstração: Suponha que o teorema não seja válido, isto é, existem $n \in \mathbb{N}$ e $A \subsetneq I_n$ e uma bijeção $f_n : A \to I_n$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ o menor natural nessas condições, que existe pelo PBO. Isto é, existe $A \subsetneq I_{n_0}$ e uma bijeção $f : A \to I_{n_0}$.

Se $n_0 \in A$, pelo lema anterior, existe uma bijeção $g : A \to I_{n_0}$ tal que $g(n_0) = n_0$. Daí

$$g\,|_{A\setminus\{n_0\}}\colon A \setminus \{n_0\} \to I_{n_0-1}$$

é uma bijeção do subconjunto próprio $A \setminus \{n_0\}$ sobre I_{n_0-1}, o que contraria a minimalidade de n_0.

Se $n_0 \notin A$ então tome $a \in A$ tal que $f(a) = n_0$ e a restrição de f ao subconjunto próprio $A \setminus \{a\} \subset I_{n_0-1}$ será uma bijeção sobre I_{n_0-1}, de novo contrariando a minimalidade de n_0. ■

Corolário 1.2 *Seja X um conjunto finito. Uma aplicação $f : X \to X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.*

Demonstração: Como X é finito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|X| = |I_n|$, isto é, existe uma bijeção $\phi : I_n \to X$.

Note que $f : X \to X$ é injetiva (sobrejetiva) se, e somente se, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi : I_n \to I_n$ é injetiva (sobrejetiva). Então vamos considerar $f : I_n \to I_n$.

Suponha f injetiva, daí existe uma bijeção $f : I_n \to f(I_n)$ e sua inversa $f^{-1} : f(I_n) \to I_n$, logo pelo teorema anterior devemos ter $f(I_n) = I_n$ e daí segue que f é sobrejetiva.

Suponha agora f sobrejetiva, daí para cada $x \in I_n$, escolhemos $y = g(x) \in I_n$ tal que $f(y) = x$. Dessa forma definimos uma aplicação $g : I_n \to I_n$ tal que $f(g(x)) = x$ para todo $x \in I_n$. Daí g é injetiva e pela primeira parte da demonstração, g é sobrejetiva. Assim, para provarmos que f é injetiva, tome $y_1, y_2 \in I_n$ tais que $f(y_1) = f(y_2)$. Existem $x_1, x_2 \in I_n$ tais que $g(x_1) = y_1$ e $g(x_2) = y_2$ e daí temos

$$x_1 = f(g(x_1)) = f(y_1) = f(y_2) = f(g(x_2)) = x_2$$

e portanto

$$y_1 = g(x_1) = g(x_2) = y_2,$$

logo f é injetiva. ■

Definição 1.2 *Um conjunto X é **enumerável** quando é finito ou quando $|X| = |\mathbb{N}|$, isto é, quando existe uma bijeção de X com algum I_n ou com $\mathbb{N}$. Se $|X| = |\mathbb{N}|$, diz-se que X possui cardinalidade $\aleph_0$ (lê-se: "aleph zero").*

Se A e B são conjuntos finitos, $A \subset B$, $A \neq B$, então $|A| < |B|$. No entanto, isso não é verdade no caso de conjuntos infinitos. Por exemplo, seja $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{P} \neq \mathbb{N}$ dado por $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Observe que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ dada por $f(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ é uma bijeção. Logo $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$, mas $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$.

Teorema 1.6 *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração: Se X é finito, o resultado segue da definição de enumerável. Caso contrário, vamos enumerar os elementos de X da seguinte forma: seja $x_1 =$ *menor elemento de* X e suponha já definidos $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Defina $A_n = X - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Note que $A_n \neq \emptyset$, pois X é infinito, logo pelo PBO, existe x_{n+1} menor elemento de A_n. Afirmamos que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. De fato, caso contrário, existiria $x \in X$ diferente de todos os x_i, daí $x \in A_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e então x seria um número natural maior que todos os elementos do conjunto infinito $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Mas um conjunto infinito de números naturais é ilimitado. ■

Exemplo 1.1 *O conjunto dos números naturais pares e o conjunto dos números naturais ímpares são enumeráveis. (Verifique!)*

Corolário 1.3 *Seja $f : X \to Y$ injetiva. Se Y é enumerável então X também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração: Como Y é enumerável temos duas possibilidades:

- Y é finito. Daí, como $f : X \to Y$ é injetiva, segue que X é finito e portanto, enumerável.
- Existe uma bijeção $\phi : Y \to \mathbb{N}$. Daí considere a função $\phi \circ f : X \to \mathbb{N}$. Como ϕ e f são injetivas então $\phi \circ f$ é injetiva. Logo

  $$\phi \circ f : X \to Im(\phi \circ f) \subset \mathbb{N}$$

  é uma bijeção de X num subconjunto dos naturais, que é enumerável pelo teorema anterior.

■

Corolário 1.4 *Seja $f : X \to Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável então Y também é.*

Demonstração: Como f é sobrejetiva, para $y \in Y$, existe pelo menos um $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Escolha para cada y, um x que satisfaça tal condição e defina

$$\begin{array}{rcl} g : Y & \to & X \\ y & \mapsto & x. \end{array}$$

Dados $y_1, y_2 \in Y$ tais que $g(y_1) = g(y_2)$ temos

$$g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow f(g(y_1)) = f(g(y_2)) \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow g \quad \text{é injetiva.}$$

Pelo corolário anterior Y é enumerável. ■

Exemplo 1.2 *O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. Defina a sobrejeção*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & n \quad \textit{ímpar} \\ -\dfrac{n}{2}, & n \quad \textit{par.} \end{cases} \end{array}$$

Corolário 1.5 *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Demonstração: Se X e Y são enumeráveis, existem bijeções $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$. Defina

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & X \times Y \\ (m, n) & \mapsto & (f(m), g(n)). \end{array}$$

Note que ϕ é sobrejetiva, logo se $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ for enumerável, o resultado segue do corolário anterior. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (m, n) & \mapsto & 2^m \cdot 3^n. \end{array}$$

Pela unicidade da decomposição de inteiros em fatores primos ψ é injetiva. Logo pelo Corolário 1.3, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. ■

Exemplo 1.3 *O conjunto $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$ dos números racionais é enumerável. Podemos definir, por exemplo, uma sobrejeção*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Q} \\ (m, n) & \mapsto & \frac{m}{n}. \end{array}$$

Corolário 1.6 *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração: Dados $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ uma família enumerável de conjuntos enumeráveis, existem sobrejeções $f_1 : \mathbb{N} \to X_1, f_2 : \mathbb{N} \to X_2, \ldots, f_n : \mathbb{N} \to X_n, \ldots$

Seja $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, definimos a sobrejeção $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ por $f(m, n) = f_n(m)$. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, segue do Corolário 1.4 que X é enumerável. ■

Teorema 1.7 *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Demonstração: Se $\mathbb{R}$ fosse enumerável então o intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ seria enumerável pelo Corolário 1.3, já que a inclusão $i : (0, 1) \hookrightarrow \mathbb{R}$ é uma função injetiva. Sendo assim, é suficiente mostrarmos que $(0, 1)$ não é enumerável. De fato, suponha por contradição que $(0, 1)$ seja enumerável. E escrevemos uma enumeração de $(0, 1)$ da seguinte forma

$$\begin{gathered} 0, a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1n} \ldots \\ 0, a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2n} \ldots \\ \vdots \\ 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots \\ \vdots \end{gathered}$$

onde $a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Construa o decimal $0, b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots$ satisfazendo o seguinte

$$b_1 \neq a_{11}; \quad b_2 \neq a_{22}; \quad \ldots; \quad b_n \neq a_{nn}; \quad \ldots$$

Note que $0, b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots$ não se encontra na lista enumerada de elementos dada. Portanto, $(0, 1)$ é não enumerável. ■

Observação 1.1 *Na Seção 2.4 mostraremos novamente, porém de maneira diferente da que acabamos de apresentar, que o conjunto dos números reais não é enumerável. Lá utilizaremos o teorema dos intervalos encaixantes.*

Corolário 1.7 *Os irracionais são não enumeráveis.*

Demonstração: Observe que o conjunto dos números reais é a união disjunta do conjunto dos números racionais, que é enumerável como visto no Exemplo 1.3, com o conjunto dos números irracionais. Logo, se os irracionais fossem enumeráveis, pelo Corolário 1.6, o conjunto dos números reais seria enumerável, contrariando o teorema anterior. ■

1.3 Exercícios

(1) Mostre, por indução, que:

(a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) $1 + n \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(c) $2^n < n!$, para todo $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) Considere uma progressão aritmética de razão r e termo inicial a_1. Usando indução, prove que:

(a) $a_n = a_1 + (n-1)r$;

(b) a soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é dada por

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

(3) Uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1 é uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ em que o quociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ é sempre igual a q, para todo $n \geq 2$. Considere uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1. Usando indução prove que:

(a) $a_n = a_1 q^{n-1}$;

(b) a soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é dada por

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

(4) (a) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^2 e A^3 para determinar uma possível fórmula para A^n, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demonstre a fórmula encontrada no item anterior por indução.

(5) Mostre que $a^+ \neq a$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

(6) Mostre, usando o Princípio da Boa Ordenação (PBO), que:

(a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) $1 + n \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(7) Use o PBO para provar que qualquer subconjunto dos naturais não vazio e limitado superiormente tem um maior elemento. (Sugestão: suponha que cada elemento nesse conjunto S, seja menor que n. Considere o conjunto de todos os números da forma $n - s$, onde $s \in S$.)

(8) Mostre que o PBO implica o princípio de indução.

(9) Mostre que $x_n = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ é múltiplo de 7 , para todo $n \in \mathbb{N}$.

(10) ***(Desigualdade de Bernoulli)*** Mostre que $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, para todo número real h tal que $h > -1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

(11) Se $0 \leq k \leq n$, define-se o "coeficiente binomial" $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
Mostre que

(a) $\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}, \quad k \neq 0, n$ (Relação de Stifel)

(b) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ é sempre um número natural.

(12) Faça uma conjectura a respeito da soma

$$S_n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Prove sua conjectura.

(13) Prove que a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m+1, n) = 2^m(2n - 1)$ é uma bijeção.

(14) Seja $I_n = \{p \in \mathbb{N} : \; p \leq n\}$.

(a) Dados m, n dois números naturais tais que $m > n > 0$, mostre que não existe nenhuma função injetora de I_m em I_n.

(b) Dados dois conjuntos X e Y respectivamente com m e n elementos, se $m > n > 0$, mostre que não existe nenhuma função injetora de X em Y.

(15) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P_n = \{X \subset \mathbb{N} : \; |X| = n\}$. Prove que P_n é enumerável. Conclua que o conjunto P_f dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

(16) Sejam Y enumerável e $f : X \to Y$ tal que, para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é enumerável. Prove que X é enumerável.

(17) Mostre que todo conjunto finito possui máximo.

(18) Prove que o conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos dos naturais não é enumerável.

(19) Mostre que todo conjunto infinito possui um subconjunto (infinito) enumerável.

(20) Construa uma bijeção do intervalo $(0, 1)$ na reta $(-\infty, \infty)$.

(21) Um número real r chama-se **algébrico** quando existe um polinômio $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, não identicamente nulo, com coeficientes inteiros, tal que $f(r) = 0$.

  (a) Prove que o conjunto dos polinômios de coeficientes inteiros é enumerável.

  (b) Mostre que o conjunto dos números algébricos reais é enumerável.

(22) Seja X o complementar de um conjunto enumerável de números reais. Mostre que, para cada intervalo aberto (a, b), a intersecção $(a, b) \cap X$ é não enumerável.

(23) Defina uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $f^{-1}(n)$ seja infinito.

(24) Obtenha uma decomposição $\mathbb{N} = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup \cdots$ tal que os conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ são infinitos e dois a dois disjuntos.

(25) Hilbert observou que um hotel com um número infinito de quartos sempre pode acomodar mais hóspedes, mesmo se tivermos uma infinidade de novos hóspedes e que os quartos do hotel já estejam ocupados. Explique como fazer isso.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS REAIS

Antes de entendermos um pouco mais sobre a construção dos números reais é pertinente fazermos uma contextualização histórica do processo de formalização dos objetos que estudaremos neste capítulo. O século XIX foi um período em que através de um estudo crítico de fundamentos da matemática foi possível fazer uma formulação mais precisa de inúmeros conceitos, e dentre estes conceitos, temos o de números reais. A maioria dos conceitos que foram formalizados e de certa forma, organizados, neste período, já eram conhecidos desde o tempo dos gregos, no entanto foi sentida uma necessidade de organização de todo esse conhecimento, resultando na chamada matemática moderna. Inúmeros matemáticos deram construções mais sistemáticas dos números reais e dentre essas, as de Cantor e Dedekind[1](1831 - 1916) são as que permanecem até hoje. Eles construíram, de maneira independente, o sistema dos números reais. Seus métodos eram distintos, mas equivalentes. Enquanto o trabalho de Cantor era baseado em sequências, chamadas de fundamentais, Dedekind construiu os números reais através do que chamamos de cortes de Dedekind. Apesar de serem extremamente interessantes as construções de ambos, estamos mais interessados aqui nas propriedades operacionais dos objetos do que em suas naturezas intrínsecas. Logo, nos baseamos em objetos já conhecidos e queremos estabelecer leis operacionais com os novos objetos. Para uma breve exposição sobre as construções independentes de Cantor e Dedekind sugerimos o capítulo 3 e o apêndice A de [6]. Nosso objetivo neste capítulo é apresentar de maneira axiomática o conjunto dos números reais culminando na justificativa de que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo arquimediano, assim como apresentado em [4]. Sugerimos também [2] para mais detalhes.

Consideremos os seguintes conceitos primitivos:

[1]Richard Dedekind foi um matemático alemão conhecido principalmente por seus trabalhos sobre a teoria de anéis, teoria algébrica dos números e a construção de números reais.

- um conjunto de objetos chamados números reais e denotado por $\mathbb{R}$;
- duas operações definidas neste conjunto: adição e multiplicação

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b, a \cdot b \in \mathbb{R};$$

- Positividade: existe um subconjunto $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}$, que será o conjunto dos chamados **números reais positivos**.

2.1 $\mathbb{R}$ é um corpo

Com as operações de adição e multiplicação dos números reais consideramos os seguintes axiomas válidos no conjunto dos números reais.

(I) Axiomas da adição

Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos:

(A1) Associatividade

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

(A2) Comutatividade

$$a + b = b + a.$$

(A3) Elemento neutro: existe $0 \in \mathbb{R}$, tal que dado $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$.

Observação 2.1 *O elemento neutro da adição é único. De fato, suponha* 0 *e* $0'$ *elementos neutros da adição. Daí*

$$0 + 0' = 0, \quad \textit{pois} \quad 0' \quad \textit{é elemento neutro}$$
$$0 + 0' = 0', \quad \textit{pois} \quad 0 \quad \textit{é elemento neutro}$$

portanto $0 = 0 + 0' = 0'$.

(A4) Existência do oposto: para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $b \in \mathbb{R}$, tal que $a + b = 0$. Denotamos o oposto de a por $-a$.

Observação 2.2 *O oposto de* $a \in \mathbb{R}$ *é único. De fato, suponha* b *e* $\bar{b}$ *números reais tais que*

(i) $a + b = 0$
(ii) $a + \bar{b} = 0$

Daí

$$b \underbrace{=}_{(A3)} b + 0 \underbrace{=}_{(ii)} b + (a + \bar{b}) \underbrace{=}_{(A1)} (b + a) + \bar{b} \underbrace{=}_{(i)\ e\ (A2)} 0 + \bar{b} \underbrace{=}_{(A3)} \bar{b}.$$

(II) Axiomas da multiplicação

Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos:

(M1) Associatividade

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(M2) Comutatividade

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

(M3) Elemento neutro (unidade): existe o elemento $1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, tal que dado $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$.

(M4) Existência do inverso: para todo $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, existe $b \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot b = 1$. Denotaremos o inverso de $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ por a^{-1} ou $\frac{1}{a}$.

(M5) Distributividade

$$a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

Em matemática, um conjunto que satisfaça os nove axiomas enunciados é chamado um **corpo**. Portanto, o conjunto dos números reais é um corpo, assim como o conjunto dos números racionais, por exemplo.

Proposição 2.1 (Lei do cancelamento da adição) *Se a, b, c são números reais tais que $a + b = a + c$, então $b = c$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} a + b = a + c &\underbrace{\Rightarrow}_{A4} (-a) + (a + b) = -a + (a + c) \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{A1} (-a + a) + b = (-a + a) + c \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{A4} 0 + b = 0 + c \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{A3} b = c. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.2 (Lei do anulamento do produto (LAP)) *Se a, b são números reais tais que $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.*

Demonstração: Suponha $a \neq 0$, daí

$$\begin{aligned} a \cdot b = 0 &\underbrace{\Rightarrow}_{M4} a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{M1} (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{M4} 1 \cdot b = 0 \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{M3} b = 0 \end{aligned}$$

■

Concluimos essa seção definindo mais duas operações em $\mathbb{R}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, definimos a subtração de a e b por

$$a - b := a + (-b),$$

e definimos a divisão de a por b, quando $b \neq 0$, como sendo

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}.$$

2.2 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado

O conjunto dos números reais ainda satisfaz axiomas relacionados a positividade.

(III) Axiomas de ordem

O subconjunto $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}$ dos números positivos, satisfaz os seguintes axiomas:

(O1) Tricotomia: Se $a \in \mathbb{R}$, então uma e apenas uma das condições ocorre: ou $a = 0$, ou $a \in \mathbf{P}$ ou $-a \in \mathbf{P}$.

(O2) $a, b \in \mathbf{P} \Rightarrow a + b \in \mathbf{P}$.

(O3) $a, b \in \mathbf{P} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbf{P}$.

Um corpo satisfazendo estes axiomas é dito um **corpo ordenado**. A seguir veremos que essa denominação faz sentido, já que através destes axiomas conseguimos definir uma ordenação no conjunto dos números reais. Portanto, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um corpo ordenado.

Definição 2.1 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, escrevemos $a > b$ (lê-se: "a maior que b") se $a - b \in \mathbf{P}$. Analogamente, escrevemos $a < b$ (lê-se: "a menor que b") se $b - a \in \mathbf{P}$.*

Proposição 2.3 *A relação ">" é transitiva.*

Demonstração: Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a > b$ e $b > c$, provemos que $a > c$.

$$\begin{aligned} a > b \quad \text{e} \quad b > c &\underbrace{\Rightarrow}_{def} a - b \in \mathbf{P} \quad \text{e} \quad b - c \in \mathbf{P} \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{O2} (a - b) + (b - c) \in \mathbf{P} \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{A1} a + (-b + b) - c \in \mathbf{P} \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{A4} a + 0 - c \in \mathbf{P} \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{A3} a - c \in \mathbf{P} \underbrace{\Rightarrow}_{def} a > c \end{aligned}$$

■

Observação 2.3 *Uma relação de ordem estrita é apenas transitiva.*

$(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ é um **corpo estritamente ordenado** pela relação "maior que". E vamos utilizar essa relação de ordem para naturalizar algumas notações:

- $a > 0 \Leftrightarrow a - 0 \in \mathbf{P} \Leftrightarrow a \in \mathbf{P}$
- $0 > b \Leftrightarrow 0 - b \in \mathbf{P} \Leftrightarrow 0 + (-b) \in \mathbf{P} \Leftrightarrow -b \in \mathbf{P}$. Neste caso escrevemos $b < 0$.
- $x > y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{P} \Leftrightarrow x - y > 0 \Leftrightarrow 0 < x - y \Leftrightarrow y < x$

Proposição 2.4 *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

(i) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ *(compatibilidade da adição com a ordem)*

(ii) $a < b$ *e* $c > 0 \Leftrightarrow ac < bc$ *(compatibilidade da multiplicação com a ordem)*

(iii) $a < b$ *e* $c < 0 \Leftrightarrow ac > bc$

(iv) $c > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{c} > 0$

Demonstração:

(i)

$$\begin{aligned} a < b \Rightarrow b - a > 0 &\Rightarrow b + (c + -c) - a > 0 \\ &\Rightarrow (b + c) - (a + c) > 0 \\ &\Rightarrow b + c > a + c \\ &\Rightarrow a + c < b + c \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} b - a > 0 \quad \text{e} \quad c > 0 &\underbrace{\Rightarrow}_{O3} (b - a) \cdot c > 0 \\ &\Rightarrow bc - ac > 0 \\ &\Rightarrow bc > ac \\ &\Rightarrow ac < bc \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} a < b \quad \text{e} \quad c < 0 &\Rightarrow b - a > 0 \quad \text{e} \quad -c > 0 \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{O3} (b - a)(-c) > 0 \\ &\Rightarrow b(-c) + (-a)(-c) > 0 \\ &\Rightarrow -bc + ac > 0 \\ &\Rightarrow ac - bc > 0 \\ &\Rightarrow ac > bc \end{aligned}$$

(iv) Como $c \neq 0$ então existe $\frac{1}{c} \neq 0$ real tal que $c \cdot \frac{1}{c} = 1$. Portanto por (O1), $\frac{1}{c} > 0$ ou $\frac{1}{c} < 0$. Entretanto, se $\frac{1}{c}$ fosse menor que zero, teríamos

$$\frac{1}{c} \cdot c < 0 \cdot c \Rightarrow 1 < 0,$$

que é um absurdo. Portanto $\frac{1}{c} > 0$.

■

Podemos definir em $\mathbb{R}$ uma ordem parcial como segue.

Definição 2.2 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que a é **menor ou igual a** b e denotamos $a \leq b$ se e, somente se $a < b$ ou $a = b$.*

É fácil ver que assim definida a relação acima é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

2.3 Valor absoluto

Seja $a \in \mathbb{R}$, definimos o **valor absoluto** de a e denotamos $|a|$, como sendo a distância, na reta real, de a até o 0, isto é,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{se} \quad a < 0. \end{cases}$$

Propriedades do valor absoluto

(VA1) $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(VA2) $x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(VA3) $|-x| = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(VA4) $|x|^2 = x^2$ ($|x| = \sqrt{x^2}$), para todo $x \in \mathbb{R}$;

(VA5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$;

Demonstração:

$$|x \cdot y| \underbrace{=}_{\text{VA4}} \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} \underbrace{=}_{\text{VA4}} |x| \cdot |y|.$$

■

(VA6) $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$, para todo $y \in \mathbb{R}$ não nulo;

Demonstração:

$$\left|\frac{1}{y}\right| \underbrace{=}_{\text{VA4}} \sqrt{\frac{1}{y^2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{y^2}} \underbrace{=}_{\text{VA4}} \frac{1}{|y|}.$$

■

(VA7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$. para todos $x, y \in \mathbb{R}$ com y não nulo;

Demonstração:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x \cdot \frac{1}{y}\right| \underbrace{=}_{\text{VA5}} |x| \cdot \left|\frac{1}{y}\right| \underbrace{=}_{\text{VA6}} |x| \cdot \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}.$$

■

(VA8) Sejam $a, x \in \mathbb{R}$ com $a > 0$, então

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

Teorema 2.1 (Desigualdade triangular) *Se $x, y \in \mathbb{R}$ então*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Demonstração: Temos

$$|x| \geq x \quad \text{e} \quad |y| \geq y \Rightarrow |x| + |y| \geq x + y$$

e ainda

$$|x| \geq -x \quad \text{e} \quad |y| \geq -y \Rightarrow |x| + |y| \geq -x - y = -(x + y).$$

Portanto

$$|x| + |y| \geq \max\{x + y, -(x + y)\} = |x + y|.$$

■

Corolário 2.1 *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \leq |x| + |y|$.*

2.4 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo arquimediano

Observe que até este momento o corpo dos números reais não é o único que satisfaz todas as nossas construções anteriores. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, satisfaz todos os axiomas que enunciamos até este momento, sendo assim, $\mathbb{Q}$ também é um corpo ordenado. Nesta seção iremos deixar claro porque estamos fazendo toda a nossa construção com os números reais e não com os racionais. Veremos que apesar de muitas semelhanças, o conjunto dos racionais não é completo, no sentido que definiremos mais adiante.

Um número real c é uma **cota superior** de $A \subset \mathbb{R}$ se $x \leq c$, para todo $x \in A$. Se existe uma cota superior para A, dizemos que A é **limitado superiormente**, isto é,

$$A \text{ é limitado superiormente} \Leftrightarrow \exists\ c \in \mathbb{R} :\ x \leq c, \text{ para todo } x \in A.$$

A menor cota superior de A chama-se **supremo** de A. Assim, se $c \in \mathbb{R}$ e c é o supremo de A, significa que:

- $x \leq c,\ \forall\ x \in A$ (c é uma cota superior de A);
- Se α é cota superior de A, então $c \leq \alpha$ (c é a menor cota superior de A).

Denotamos o supremo de A por $supA$.

De maneira análoga, $c \in \mathbb{R}$ é uma **cota inferior** de $A \subset \mathbb{R}$ se $x \geq c$, para todo $x \in A$ e, se existe uma cota inferior para A, dizemos que A é **limitado inferiormente**, ou seja,

$$A \text{ é limitado inferiormente} \Leftrightarrow \exists\ c \in \mathbb{R} :\ x \geq c, \text{ para todo } x \in A.$$

A maior cota inferior de A chama-se **ínfimo** de A e a denotamos por $infA$. Assim, se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c = infA$, temos:

- $x \geq c,\ \forall\, x \in A$;
- se β é cota inferior de A então $\beta \leq c$.

Definição 2.3 *$S \subset \mathbb{R}$ é **limitado** se for limitado superiormente e inferiormente.*

Observação 2.4 *Se $S \subset \mathbb{R}$ então são equivalentes:*

- *S é limitado;*
- $\exists\ a, b \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b, \forall\ x \in S$;
- $\exists\ M > 0 :\ |x| \leq M, \forall\ x \in S$.

Proposição 2.5 *O supremo de um conjunto quando existe é único.*

Demonstração: Sejam a e b supremos de $A \subset \mathbb{R}$. Assim a e b são cotas superiores de A. Por um lado, a é supremo e daí é a menor das cotas superiores, logo devemos ter $a \leq b$. Por outro lado, b é supremo, logo temos $b \leq a$. Portanto $a = b$. ■

Axioma do completamento

O **axioma do completamento** ou **postulado de Dedekind** (PD) tem o seguinte enunciado:

Todo conjunto não vazio de números reais que tem uma cota superior tem supremo.

Em símbolos temos:

$$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \exists\ \alpha \in \mathbb{R} :\ x \leq \alpha, \forall\ x \in A \Rightarrow \exists\ c \in \mathbb{R} :\ c = supA.$$

Dizemos que $\mathbb{R}$ é **completo** pois vale o postulado de Dedekind, ao contrário, por exemplo dos racionais. Observe que até aqui, tudo o que foi construído para os números reais vale para os racionais, no entanto no conjunto dos racionais não é verdade que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente possua supremo racional, como veremos no Exemplo 2.2.

Exemplo 2.1 *Vamos analisar o intervalo* $(0,5] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 5\}$. *Temos*

- $(0,5] \subset \mathbb{R}$;
- $4 \in (0,5]$, *logo* $(0,5] \neq \emptyset$;
- $(0,5]$ *é limitado superiormente, pois se* $x \in (0,5]$ *então* $x \leq 7$.

Portanto pelo PD existe $c = sup(0,5], c \in \mathbb{R}$. *Em particular,* c *é cota superior, logo* $5 \leq c$. *Vamos supor que 5 fosse menor que c, daí teríamos*

$$5 + 5 < 5 + c \Rightarrow \frac{5+5}{2} < \frac{5+c}{2}$$

e

$$5 + c < c + c \Rightarrow \frac{5+c}{2} < \frac{c+c}{2}.$$

Daí

$$\frac{5+5}{2} < \frac{5+c}{2} < \frac{c+c}{2} \Rightarrow 5 < \frac{5+c}{2} < c.$$

Logo $\dfrac{5+c}{2}$ *seria uma cota superior para* $(0,5]$ *e seria menor que c. Um absurdo, pois c é a menor das cotas superiores. Portanto,* $c = 5$.

Definição 2.4 *Dizemos que* $m \in A \subset \mathbb{R}$ *é o* ***máximo (mínimo)*** *de A se m é cota superior (inferior) de A.*

Observação 2.5 *É claro que, se A possui máximo (mínimo), então seu máximo (mínimo) será o supremo (ínfimo).*

Exemplo 2.2 *Vamos analisar agora o conjunto* $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ x > 0 \quad e \quad x^2 < 2\}$.

Observe que $A \neq \emptyset$, *pois* $1 \in A$, *já que* $1 \in \mathbb{Q}$, $1 > 0$ *e* $1^2 = 1 < 2$. *E, por construção,* $A \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Mostremos primeiramente que A não possui máximo. Para isso, dado $a \in A$, *vamos mostrar que sempre é possível encontrar outro elemento em A que seja maior que a.*

Observe que, se $a \in A$ *então* $a + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ *e* $a + \frac{1}{n} > 0$ *para qualquer* $n \in \mathbb{N}$. *Resta considerarmos um* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$. *Mas,*

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n}.$$

Logo é suficiente escolhermos $n \in \mathbb{N}$ que satisfaça

$$a^2 + \frac{2a+1}{n} < 2 \Leftrightarrow \frac{2a+1}{n} < 2 - a^2 \Leftrightarrow n > \frac{2a+1}{2-a^2}.$$

Por exemplo, para $a = 1,41$, devemos escolher qualquer $n \in \mathbb{N}$ que satisfaça

$$n > \frac{2 \cdot 1,41 + 1}{2 - (1,41)^2} \Rightarrow n > 321,008.$$

Portanto, dado $a \in A$, a não é máximo de A pois $a + \frac{1}{n} \in A$ e é maior que a, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n > \frac{2a+1}{2-a^2}$. Logo A não tem máximo.

Mostremos agora que A possui supremo, mas este supremo não pertence a $\mathbb{Q}$. Para garantirmos a existência do supremo real, resta mostrarmos que A é limitado superiormente. O que de fato ocorre, pois para todo $x \in A$, $x^2 < 2 < 2,25$. Daí

$$x^2 - 2,25 < 0 \Rightarrow x^2 - (1,5)^2 < 0 \Rightarrow \underbrace{(x + 1,5)}_{>0}(x - 1,5) < 0 \Rightarrow x - 1,5 < 0 \Rightarrow x < 1,5,$$

logo $1,5$ é cota superior de A. E então pelo postulado de Dedekind, existe $c = supA \in \mathbb{R}$.

Vamos supor que $c \in \mathbb{Q}$. Já provamos que A não tem máximo, logo $c \notin A$ e portanto devemos ter $c^2 \geq 2$. Se c^2 fosse maior que 2, teríamos

$$c^2 + c^2 > 2 + c^2 \Rightarrow \frac{c^2 + c^2}{2} > \frac{2 + c^2}{2}$$

e

$$c^2 + 2 > 2 + 2 \Rightarrow \frac{c^2 + 2}{2} > \frac{2 + 2}{2},$$

daí

$$\frac{c^2 + c^2}{2} > \frac{2 + c^2}{2} > \frac{2 + 2}{2} \Rightarrow c^2 > \frac{c^2 + 2}{2} > 2 \Rightarrow \frac{2}{c} < \frac{c^2 + 2}{2c} < c.$$

E como c é supremo de A, então $\frac{c^2 + 2}{2c}$ não é cota superior de A. Logo existe $r \in A$ tal que $r > \frac{2 + c^2}{2c}$. Daí temos

$$\begin{aligned} r^2 > \left(\frac{2 + c^2}{2c}\right)^2 &= \frac{4 + 4c^2 + c^4}{4c^2} \\ &= \frac{4 - 4c^2 + c^4 + 8c^2}{4c^2} \\ &= \frac{(2 - c^2)^2}{4c^2} + \frac{8c^2}{4c^2} \\ &= \frac{(2 - c^2)^2}{4c^2} + 2 \Rightarrow r^2 > 2 \quad (\textit{Absurdo, pois} \quad r \in A). \end{aligned}$$

Logo deveríamos ter $c^2 = 2$. Como estamos supondo $c \in \mathbb{Q}$, temos que $c = \frac{a}{b}$ com a e b primos entre si. Daí

$$c^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \in \mathbb{Z} \quad e\ é\ par \quad \Rightarrow a \quad é\ par,$$

daí $a = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$ e então

$$\left(\frac{2k}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2 \quad é\ par \quad \Rightarrow b \quad é\ par \quad (Absurdo).$$

Portanto $c \notin \mathbb{Q}$ e $supA$ não é racional, mostrando assim que o axioma do completamento não vale em $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.2 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Se $X \neq \emptyset$ e X possui cota inferior, então X possui ínfimo.*

Demonstração: Seja S o subconjunto dos reais formado pelos elementos opostos dos elementos de X, isto é,

$$S = \{y \in \mathbb{R} : y = -x,\ x \in X\}.$$

Como $X \neq \emptyset$ então $S \neq \emptyset$ e por construção $S \subset \mathbb{R}$.

Seja a uma cota inferior de X, daí $-a$ é uma cota superior de S e pelo postulado de Dedekind, existe $c = supS$. Não é difícil ver que $-c = infX$. ■

Vamos mostrar a seguir de uma maneira distinta do que foi mostrado no Teorema 1.7 que o conjunto dos números reais não é enumerável. Para tal, utilizaremos o teorema a seguir:

Teorema 2.3 (Intervalos encaixantes) *Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: As inclusões $I_n \supset I_{n+1}$ significam que

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

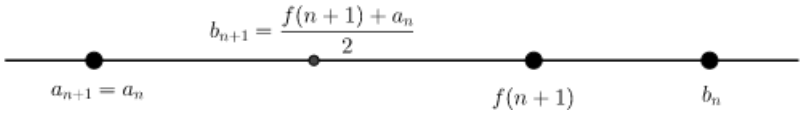
Assim, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ é limitado superiormente. Pelo postulado de Dedekind, existe $c = supA$. Daí, $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como cada b_n é cota superior de A, $c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois c é a menor cota superior de A. Portanto $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Para mostrarmos que o conjunto dos números reais não é enumerável, é suficiente mostrarmos que não existe sobrejeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. A estratégia aqui consiste em, dada uma

função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, vamos construir uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ tais que $f(n) \notin I_n$. Daí se c é um número real pertencente a todos os I_n (que existe pelo teorema anterior), nenhum dos valores $f(n)$ pode ser igual a c, logo f não é sobrejetora.

Para encerrar a prova vamos construir os intervalos da seguinte forma: seja $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $f(1) < a_1$ e suponha que já tenhamos $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$ tais que $f(j) \notin I_j$.

Se $f(n+1) \notin I_n$, tomamos $I_{n+1} = I_n$. Se $f(n+1) \in I_n$, pelo menos um dos extremos, por exemplo, a_n, é diferente de $f(n+1)$, isto é, $a_n < f(n+1)$. Neste caso, tomamos $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ com $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = \dfrac{f(n+1) + a_n}{2}$.



Teorema 2.4 *O conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais não é limitado superiomente.*

Demonstração: Suponha que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente. Além disso, é claro que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{N} \neq \emptyset$, daí pelo postulado de Dedekind existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = sup\mathbb{N}$.

Dado $\epsilon > 0$, $\alpha - \epsilon$ não é cota superior de $\mathbb{N}$, pois α é a menor cota superior. Logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \epsilon < n$. Se tomarmos, por exemplo $\epsilon = 1$ temos

$$\alpha < n + 1 \in \mathbb{N},$$

um absurdo, pois $\alpha = sup\mathbb{N}$. Portanto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. ■

Corolário 2.2 *Dado* $\epsilon > 0$ *real, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{1}{n_0} < \epsilon$ *(equivalentemente, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$*).*

De uma maneira geral, temos que um corpo $\mathbb{K}$ qualquer é dito **arquimediano** se para quaisquer $a, b \in \mathbb{K}$, com $a \neq 0$, existir $n \in \mathbb{Z}$ tal que $na > b$. Neste sentido, temos como consequência do Teorema 2.4 a seguinte propriedade dos números reais:

Corolário 2.3 (Propriedade arquimediana) *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $na > b$.

Do Corolário 2.3, temos que $\mathbb{R}$ é um corpo **arquimediano**. Portanto $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado completo arquimediano*. O corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais também é arquimediano. A título de curiosidade, $\mathbb{Q}(x)$, que é o corpo de frações do anel de polinômios $\mathbb{Q}[x]$, é um corpo ordenado não arquimediano.

2.5 Exercícios

(1) Se $x, y \in \mathbb{R}$, mostre que:

(a) $-(x-y) = y - x$.

(b) $x^2 = y^2 \Rightarrow (x = y) \quad \text{ou} \quad (x = -y)$.

(2) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que ou $a > b$, ou $a = b$, ou $a < b$.

(3) Mostre que nenhum corpo finito é ordenável.

(4) Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, prove que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

(5) Prove que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(6) (a) Sejam a, b números reais positivos. Mostre que existe um, e somente um, número natural m tal que

$$(m-1)a \leq b < ma.$$

(b) Sejam $b, c \in \mathbb{R}$, com $b > 1$. Mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > c$.

(7) Determinar os supremos e ínfimos (caso existam) dos seguintes conjuntos:

(a) $A = \left\{ \dfrac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$;

(b) $B = \left\{ \dfrac{n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$;

(c) $C = \left\{ \dfrac{2n-1}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$;

(d) $D = \{a^n : \ n \in \mathbb{N}\}$, com $a \in \mathbb{Q}$ e $0 < a < 1$.

(e) $E = \{a^n : \ n \in \mathbb{N}\}$, com $a \in \mathbb{Q}$ e $1 < a$.

(8) Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente. Considere o conjunto X definido por

$$x \in X \Leftrightarrow x \quad \text{é cota inferior de} \quad A.$$

Mostre que:

(a) $X \neq \emptyset$;

(b) X é limitado superiormente;

(c) $\sup X = \inf A$.

(9) Sejam A e B dois conjuntos não vazios e limitados de números reais. Mostre que:

(a) $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$;

(b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;

(c) $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A,\ \lambda < 0$.

(10) Se A e B são conjuntos não vazios de números reais positivos, considere o conjunto $A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A \quad \text{e} \quad y \in B\}$. Suponha A e B limitados inferiormente. Mostre que existe o ínfimo de $A \cdot B$ e que

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

(11) Sejam A e B conjuntos numéricos não vazios. Prove que

$$A \subset B \Rightarrow \inf A \geq \inf B \quad \text{e} \quad \sup A \leq \sup B.$$

(12) Sejam A e B conjuntos numéricos não vazios, tais que $a \leq b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$. Prove que $\sup A \leq \inf B$. Prove ainda que

$$\sup A = \inf B \Leftrightarrow \text{qualquer que seja} \quad \epsilon > 0 \quad \text{existem} \quad a \in A, b \in B \quad \text{tais que} \quad b - a < \epsilon.$$

(13) (a) Mostre que existe ínfimo do conjunto $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e determine este ínfimo.

(b) Mostre que existe supremo do conjunto $A = \{y \in \mathbb{Q} : 0 < y < 1\}$ e determine este supremo.

(14) Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo do conjunto

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n+1} :\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demonstre todas as afirmações.

(15) Considere o conjunto

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} :\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) Mostre que o conjunto A é limitado superiormente. Determine $\sup A$, demonstre que tal valor é o supremo do conjunto. O valor encontrado para $\sup A$ é o máximo do conjunto A?

(b) Mostre que A tem ínfimo e que $\inf A = \min A$.

(16) Considere o conjunto

$$\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Prove que -1 e 1 são o ínfimo e o supremo deste conjunto, respectivamente, e que eles não pertencem ao conjunto.

(17) Considere o conjunto $X=\{x\in\mathbb{R}:\ 0<x<1\}$ e defina a função $h:X\times X\to\mathbb{R}$ dada por

$$h(x,y)=\begin{cases}0, & \text{se} \quad x<y\\ 1, & \text{se} \quad x\geq y\end{cases}.$$

(a) Fixado $x\in X$, determine, justificando, os valores de

$$f(x):=\sup\{h(x,y):\ y\in X\} \quad \text{e}$$

$$\inf\{f(x):\ x\in X\}.$$

(b) Fixado $y\in X$, determine, justificando, os valores de

$$g(y):=\inf\{h(x,y):\ x\in X\} \quad \text{e}$$

$$\sup\{g(y):\ y\in X\}.$$

(18) Considere o conjunto $X=\{x\in\mathbb{R}:\ 0<x<1\}$ e defina a função $h:X\times X\to\mathbb{R}$ dada por $h(x,y)=2x+y$.

(a) Fixado $x\in X$, determine, justificando, os valores de

$$f(x):=\sup\{h(x,y):\ y\in X\} \quad \text{e}$$

$$\inf\{f(x):\ x\in X\}.$$

(b) Fixado $y\in X$, determine, justificando, os valores de

$$g(y):=\inf\{h(x,y):\ x\in X\} \quad \text{e}$$

$$\sup\{g(y):\ y\in X\}.$$

(19) Sejam X e Y conjuntos não vazios e $h:X\times Y\to\mathbb{R}$ uma função limitada. Defina as funções $f:X\to\mathbb{R}$ e $g:Y\to\mathbb{R}$ dadas por

$$f(x):=\sup\{h(x,y):\ y\in X\} \quad \text{e} \quad g(y):=\inf\{h(x,y):\ x\in X\}.$$

Mostre que

$$\sup\{g(y):\ y\in X\}\leq\ \inf\{f(x):\ x\in X\}.$$

(20) Mostre que a equação $x^2 = 5$ tem uma única raiz real positiva.

(21) Considere o conjunto $A = \{r \in \mathbb{R} : \ r \in \mathbb{Q} \text{ e } x < r\}$, para $x \in \mathbb{R}$ dado. Mostre que existe ínfimo de A e prove que $\inf A = x$.

(22) Utilize o exercício anterior para mostrar que o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, existem racionais r tais que $x < r < y$.

(23) Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existe s irracional tal que $a < s < b$.

(24) Seja $a > 1$ um número real. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = a^n$. Prove as seguintes afirmações:

   (a) $f(\mathbb{Z})$ não é limitado superiormente;

   (b) $\inf f(\mathbb{Z}) = 0$.

(25) Um **corte de Dedekind** é um par ordenado (A, B) onde A e B são subconjuntos não vazios de números racionais, tais que A não possui elemento máximo, $A \cup B = \mathbb{Q}$ e, dados $x \in A$ e $y \in B$ quaisquer, tem-se $x < y$.

   (a) Prove que, num corte de Dedekind (A, B), vale $\sup A = \inf B$.

   (b) Seja $\mathscr{D}$ o conjunto dos cortes de Dedekind. Prove que existe uma bijeção $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$.

CAPÍTULO 3

SEQUÊNCIAS E SÉRIES

O estudo de sequências e séries foi impulsionado por Newton e Leibniz no século XVII (antes da matemática moderna). Eles desenvolveram representações de séries para funções. Newton determinou séries de potências para as funções seno e cosseno e a função exponencial. Ele utilizou séries para desenvolver muitos resultados do cálculo envolvendo áreas, comprimento de arco e volumes.

Dividimos este capítulo em duas principais seções, uma dedicada ao estudo das sequências infinitas de números reais e outra a séries numéricas. Qualquer estudante que já fez um curso de cálculo já teve contato com esses conceitos, por isso iremos dedicar a primeira seção a um estudo mais detalhado dos teoremas envolvendo sequências e seus limites, como os teoremas da convergência monótona e de Bolzano-Weierstrass. Na seção de séries nosso principal objetivo é distinguir quando uma série é convergente ou divergente, logo apresentaremos alguns critérios de convergências que, em sua maioria, são vistos em um curso básico de cálculo. Para mais detalhes sobre os tópicos aqui apresentados e as demonstrações que forem omitidas sugerimos [1, 4].

3.1 Sequências de números reais

De um modo geral, o conceito de sequência é intuitivo e quase natural. Desde criança, ao apredermos a contar, se estamos diante de um problema de organizar um conjunto dado de números, tendemos a associar a este conjunto o que chamamos lá de uma sequência, isto é, uma organização destes números de acordo com a ordem em que aprendemos a contar. Estamos estabelecendo um padrão, um método. Sequência, de certa forma, remete a isso, e em matemática é uma sucessão de objetos cuja ordem é determinada por uma lei de formação ou função.

Uma **sequência de números reais** é uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real a_n, chamado o n**-ésimo** termo da sequência.

$$\begin{array}{rcl} s : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Escrevemos $(a_n)_{n\geq 1}$ ou $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (a_n) para indicar a sequência cujo $n-$ésimo termo é a_n.

- (a_n) é **limitada superiormente** quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (a_n) é **limitada inferiormente** quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (a_n) é **limitada** quando é limitada superiormente e inferiormente, isto é, quando existe $k > 0$ tal que $|a_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- a_n é chamado o **termo geral** da sequência;
- o conjunto dos termos da sequência (a_n) é $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

Exemplo 3.1 (a_n), $a_n = 2$ *é a* ***sequência constante*** $(2, 2, \ldots, 2, \ldots)$ *e o conjunto dos termos da sequência é* $\{2\}$.

Exemplo 3.2 $(2, 3, 2, 3, \ldots, 2, 3, \ldots)$ *é a sequência definida por*

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

e o conjunto dos termos da sequência é $\{2, 3\}$.

Exemplo 3.3 $\left(1 + 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, \ldots, 1 + \frac{1}{n}, \ldots\right)$, $n \geq 1$. *O termo geral dessa sequência é dado por* $b_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Agora observe que $b_n \leq 2$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *De fato,*

$$\frac{1}{n} \leq 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo (b_n) *é limitada superiormente. E além disso, para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos*

$$\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 \Rightarrow b_n > 1.$$

Logo (b_n) *é limitada inferiormente. Portanto* (b_n) *é limitada.*

3.1.1 Sequências convergentes

Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é **limite** da sequência (a_n) quando para todo real $\epsilon > 0$, podemos obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que sempre que $n > n_0$ temos $|a_n - a| < \epsilon$. Escrevemos $a = \lim a_n$ ou $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ou $a_n \to a$. Em símbolos, temos

$$a_n \to a \Leftrightarrow (\forall\ \epsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} :\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon).$$

Vejamos algumas formas de interpretar a definição acima:

- Para valores muito grandes de n, os termos a_n se aproximam cada vez mais de a. Note que, para valores positivos tão pequenos quanto queiramos para ϵ, é possível encontrar um n (possivelmente muito grande), tal que para valores maiores que este n, temos

$$|a_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < a_n - a < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon);$$

- Fixe uma margem de erro ϵ. Daí existe um índice n_0 tal que a partir de n_0 ($n > n_0$) os elementos da sequência são valores aproximados de a com erro menor que ϵ;

- Qualquer intervalo aberto de centro a contém todos os termos de (a_n), exceto um número finito de índices ($n \geq n_0$).

É comum chamarmos de **vizinhança** ϵ de a o conjunto dos números x do intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Observe que, dada uma sequência (a_n) de números reais e $a \in \mathbb{R}$, se $\lim a_n \neq a$ então existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer índice $n_0 \in \mathbb{N}$, existe algum número natural n maior que n_0 tal que a_n não está na vizinhaça ϵ de a.

Definição 3.1 *Dizemos que uma sequência (a_n)* ***converge*** *para um número real a se $a = \lim a_n$. Uma sequência que não é convergente, isto é, tal que não existe $\lim a_n$ é dita* ***divergente****.*

Exemplo 3.4 $(a_n), a_n = 1 + \dfrac{1}{n}, n \geq 1$. *Mostremos que*

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$ (a existência de tal n_0 é garantida pelo Teorema 2.4). Daí, se $n > n_0$ temos

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Exemplo 3.5 $(a_n), a_n = k, k \in \mathbb{R}$. *Mostremos que*

$$\lim a_n = k.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$, *tome* $n_0 = 1$. *Se* $n > 1$ *então*

$$|a_n - k| = |k - k| = 0 < \epsilon.$$

Exemplo 3.6 $(a_n), a_n = \dfrac{3n+1}{2n+5}$. *Mostremos que*

$$a_n \to \frac{3}{2}.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$, *tome* $n_0 > \dfrac{4}{\epsilon}, n_0 \in \mathbb{N}$. *Daí, se* $n > n_0$, *temos*

$$\begin{aligned}\left|\frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2}\right| &= \left|\frac{6n+2-6n-15}{2(2n+5)}\right| = \left|-\frac{13}{2(2n+5)}\right| \\ &= \frac{13}{2(2n+5)} = \frac{6,5}{2n+5} < \frac{7}{2n+5} \\ &< \frac{7}{2n} = \frac{3,5}{n} < \frac{4}{n} < \frac{4}{n_0} < 4 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.\end{aligned}$$

Teorema 3.1 *Sejam* $(a_n)_{n\geq 1}$ *e* $(b_n)_{n\geq 1}$ *duas sequências convergentes. Então* $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ *é convergente e se* $a_n \to a$ *e* $b_n \to b$, *então* $a_n + b_n \to a + b$.

Demonstração: Sejam $a = \lim a_n$ e $b = \lim b_n$. Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall\ n > n_1 \quad \text{e}$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall\ n > n_2.$$

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Se $n > n_0$, temos

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

Proposição 3.1 *O limite de uma sequência quando existe é único.*

Demonstração: Suponha $a_n \to \ell_1$ e $a_n \to \ell_2$, com $\ell_1 \neq \ell_2$. Tome $\epsilon = \frac{1}{2}|\ell_1 - \ell_2| > 0$. Pela definição de limite, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - \ell_1| < \epsilon \quad \text{e}$$

$$n > n_2 \Rightarrow |a_n - \ell_2| < \epsilon.$$

Daí,

$$n > \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow |\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \leq |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| < 2\epsilon = |\ell_1 - \ell_2|,$$

que é um absurdo. Portanto $\ell_1 = \ell_2$. ■

Definição 3.2 *Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, definimos uma* ***subsequência*** *de $(a_n)_{n\geq 1}$ como a sequência obtida desta restringindo-se a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$ do conjunto de índices. Como a função $j \mapsto n_j$ entre $\mathbb{N}_1$ e $\mathbb{N}$ é uma bijeção, toda subsequência de uma sequência é, ainda, uma sequência. É comum denotarmos uma subsequência de $(a_n)_{n\geq 1}$ por $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.*

Exemplo 3.7 *A sequência $(b_n) = (7, 11, 15, 19, 15, 7, 15, 26, 27, \ldots)$ é subsequência da sequência $(a_n) = (3, 7, 11, 15, 19, 15, 7, 15, 26, 27, \ldots)$.*

$$b_1 = a_2, b_2 = a_3, \ldots, b_n = a_{n+1}, \ldots$$

Exemplo 3.8 *Dado o número real $a < -1$, considere a sequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sejam $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais pares e $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais ímpares. Daí, a subsequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}'}$ é limitada apenas inferiormente e a subsequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}''}$ é limitada apenas superiormente.*

Teorema 3.2 *Se $\lim a_n = a$, então toda subsequência de $(a_n)_{n\geq 1}$ converge para o limite a.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, como $a_n \to a$, existe um natural n_0 tal que $|a_n - a| < \epsilon$, para $n > n_0$. Dada uma subsequência $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(a_n)_{n\geq 1}$, como $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, existe um índice n_i tal que $n_j > n_0$, para $j \geq i$, portanto, para tais j, temos $|a_{n_j} - a| < \epsilon$. Logo $a_{n_k} \to a$. ■

Teorema 3.3 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência que converge para o limite a. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < 1.$$

Logo

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Portanto, se $L = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}$, então $|a_n| \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a sequência é limitada. ■

Exemplo 3.9 *Seja* $(a_n)_{n\geq 1}$ *tal que* $a_n = (-1)^n$.

- $(a_n)_{n\geq 1}$ *é limitada, pois* $-1 \leq a_n \leq 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;
- $(a_n)_{n\geq 1}$ *não converge. De fato, se considerarmos as subsequências* $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ *temos*

  $$a_{2n} \to 1 \quad e \quad a_{2n-1} \to -1.$$

  Logo não existe $\lim a_n$.

3.1.2 Sequências monótonas

Uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ chama-se **monótona** quando se tem $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ é dita **monótona não decrescente**;
- se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ é dita **monótona não crescente**;
- se $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ é dita **crescente**;
- se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ é dita **decrescente**.

Observação 3.1 *Toda sequência monótona não decrescente ou crescente é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo. E toda sequência monótona não crescente ou decrescente é limitada superiormente pelo seu primeiro termo.*

Teorema 3.4 (Teorema da convergência monótona) *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Suponha sem perda generalidade que $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência monótona não decrescente e limitada, isto é,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq M,$$

para algum $M > 0$. Então M é uma cota superior para o conjunto dos termos de $(a_n)_{n\geq 1}$ dado por $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Como $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$, pelo postulado de Dedekind, existe $\sup A = a$.

Mostremos que $\lim a_n = a$. Dado $\epsilon > 0$, como $a = supA$ então $a - \epsilon$ não é cota superior de A, logo existe $a_{n_0} > a - \epsilon$, com $a_{n_0} \in A$. Mas

$$a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \ldots,$$

daí $a_n > a - \epsilon$, para $n \geq n_0$. Assim, para $n \geq n_0$ temos

$$a - \epsilon < a_n \leq a < a + \epsilon \Rightarrow -\epsilon < a_n - a < \epsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \epsilon.$$

■

Observação 3.2 *Se uma sequência limitada for monótona a partir de um determinado termo, então ela ainda será convergente.*

Corolário 3.1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais limitada. Definimos um conjunto B de números reais do seguinte modo: dado $x \in \mathbb{R}, x \in B$ se existir no máximo um número finito de índices n tais que $a_n > x$.

Exemplos:

- $((-1)^n)_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada. Note que $-1 \notin B$ e $-2 \notin B$, mas $1 \in B$ e $2 \in B$, pois $a_n > 1$ e $a_n > 2$ para 0 índices. Neste caso

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 1\};$$

- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada por 0 e 1. Neste caso

$$B = (0, +\infty).$$

Como $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada, existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tal que $|a_n| < M$, para todo $n \geq 1$. Agora observe que

- $M \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$;
- $B \subset \mathbb{R}$, por construção;
- $-M$ é cota inferior de B.

Logo, pelo Teorema 2.2, existe $infB = m \in \mathbb{R}$.Vamos construir ums subsequência $(a_{n_j})_j$ de (a_n) convergindo para m, isto é, $a_{n_j} \to m$.

- Existem infinitos $a_n \in (m-1, m+1)$, pois se tivesse um número finito de a_n então teríamos $(m-1) \in B$, contrariando o fato de $infB = m$. Seja n_1 tal que $a_{n_1} \in (m-1, m+1)$, isto é $|a_{n_1} - m| < 1$;
- Existem infinitos $a_n \in (m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$. Escolha $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \in (m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$, isto é $|a_{n_2} - m| < \frac{1}{2}$;
- Existem infinitos $a_n \in (m - \frac{1}{3}, m + \frac{1}{3})$. Escolha $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} \in (m - \frac{1}{3}, m + \frac{1}{3})$, isto é $|a_{n_3} - m| < \frac{1}{3}$.

Suponha escolhido o termo a_{n_k} tal que $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ e $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$, tais que $|a_{n_i} - m| < \frac{1}{i}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Consideremos o intervalo

$$\left(m - \frac{1}{k+1}, m + \frac{1}{k+1}\right).$$

Existem infinitos índices para a_n tal que $a_n \in \left(m - \frac{1}{k+1}, m + \frac{1}{k+1}\right)$, pois $m = infB$. Seja $n_{k+1} > n_k$ tal que $a_{n_{k+1}} \in \left(m - \frac{1}{k+1}, m + \frac{1}{k+1}\right)$. Por indução, construimos a subsequência $(a_{n_j})_{j \geq 1}$ de $(a_n)_{n \geq 1}$ tal que $|a_{n_j} - m| < \frac{1}{j}$, para todo $j \geq 1$.

Mostremos que $a_{n_j} \to m$. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j_0} < \epsilon$. Se $j > j_0$ então

$$|a_{n_j} - m| < \frac{1}{j} < \frac{1}{j_0} < \epsilon.$$

■

3.1.3 Sequência de Cauchy

Vimos que, uma sequência é convergente se, e somente se, a sequência possui limite. Logo, a princípio, para sabermos se uma sequência é convergente a única forma, seria determinar esse limite. Mas como fazer isso com o que temos até o momento? Usar a definição de limite para infinitos candidatos? Parece não ser razoável determinar a convergência de uma sequência usando a definição de limite. Vimos um critério de convergência para casos específicos. O Teorema da convergência monótona nos diz que toda sequência monótona e limitada é convergente. Esse, de fato, é um critério razoável. Porém não cobre todas as sequências, pois não vale a volta do teorema. Veremos mais adiante o critério de Cauchy,

que nos dá uma propriedade inerente a toda sequência de números reais convergente.

Uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é dita uma **sequência de Cauchy** se, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

Esse tipo de sequência surgiu no fim do século XVIII com relação com cálculos numéricos para solução de equações. Por exemplo, uma equação $x^5 - 5x + 1 = 0$ pode ser reescrita como $x = \dfrac{x^5+1}{5}$, daí se temos $f(x) = x$, $f(x) = \dfrac{x^5+1}{5}$. Construimos uma sequência recorrente da seguinte forma: escolha uma valor inicial x_1 e daí

$$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots$$

Se for possível provar que (x_n) é uma sequência de Cauchy, então ela deve convergir para um valor a como veremos a seguir. Daí tentamos provar que a é solução da equação inicial, ou seja, os elementos x_n da sequência são valores aproximados da solução da equação. *(Método das aproximações sucessivas)*

Exemplo 3.10 $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{1}{n}$. *Mostremos que* (a_n) *é sequência de Cauchy.*

Dado $\epsilon > 0$, *tome* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2}$. *Se* $n, m > n_0$, *então*

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \quad e \quad \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0},$$

daí temos

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{m}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|-\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Proposição 3.2 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ sequência de Cauchy, daí para $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m > n_0$ então

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Em particular, $|a_n - a_{n_0}| < 1$, para todo $n \geq n_0$. Logo, se $n \geq n_0$, temos

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|.$$

Tome $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$ e então temos $|a_n| \leq M$, para todo $n \geq 1$.
■

Exemplo 3.11 $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = (-1)^n$. *Note que* $(b_n)_{n\geq 1}$ *é limitada, mas não é de Cauchy. De fato, fixe* $\epsilon = 1$, *daí para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos*

$$|a_{n+1} - a_{n+2}| = 2 > 1.$$

Critério de Cauchy

"sequências de números reais cujos termos de índices 'muito grandes' se concentram em intervalos 'muito pequenos' devem ser necessariamente convergentes. Logo existe um número real que é o limite da sequência."

Essa foi a estratégia utilizada por Cantor para mostrar a completude dos números reais. A construção de Cantor baseou-se nessas sequências (sequências fundamentais). Ele mostrou que o conjunto de números reais é completo, já que toda sequência fundamental contém limite real, logo não existem lacunas nos números reais. Já nos racionais, nem toda sequência fundamental de números racionais tem limite racional. As sequências fundamentais de Cantor são hoje, o que chamamos de sequências de Cauchy e a estratégia de Cantor pode ser traduzida no seguinte critério:

Proposição 3.3 (Critério de convergência de Cauchy) *Uma sequência de números reais (a_n) é convergente se, e somente se, (a_n) é sequência de Cauchy.*

Observação 3.3 *Em $\mathbb{Q}$, existem sequências de Cauchy que não são convergentes em $\mathbb{Q}$.*

Em geral, em qualquer texto sobre sequências de números reais é dada mais atenção as sequências que convergem. Como é possível perceber, temos mais resultados, critérios e consequências interessantes com essas sequências. Não faremos diferente neste material, no entanto, para os interessados em ler alguma discussão básica sobre sequências divergentes, indicamos a leitura da Seção 5.4 de [6]. Na seção, intitulada "Classificação de sequências divergentes", o autor separa e discute as sequências divergentes em dois conjuntos: as monótonas e as não monótonas. E nestes conjuntos existem sequências que ele chama de sequências de oscilação finita ou infinita e sequências que convergem para $+\infty$ ou $-\infty$.

3.1.4 Limites e desigualdades

Teorema 3.5 *Seja $a = \lim a_n$. Se $b < a$, então existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, $a_n > b$. Analogamente, se $a < b$ existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, $a_n < b$.*

Demonstração: Para $\epsilon = a - b$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < a - b \Rightarrow -a + b < a_n - a < a - b \Rightarrow b < a_n < a + \epsilon \Rightarrow b < a_n.$$

■

Corolário 3.2 *Seja $a = \lim a_n$. Se $a > 0$ então existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, $a_n > 0$. Analogamente, se $a < 0$ existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, $a_n < 0$.*

Corolário 3.3 *Seja* $a = \lim a_n$ *e* $b = \lim b_n$. *Se* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \geq n_0$, *então* $a \leq b$. *Em particular, se* $a_n \leq b$, *para todo* $n \geq n_0$, *então* $\lim a_n \leq b$.

Teorema 3.6 (Teorema do confronto) *Se* $\lim a_n = \lim b_n = a$ *e* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *para todo* $n \geq n_0$, *então* $\lim c_n = a$.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{e}$$

$$n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - a| < \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < b_n < a + \epsilon.$$

Seja $n_\epsilon = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Daí

$$n \geq n_\epsilon \Rightarrow a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < c_n < a + \epsilon \Rightarrow |c_n - a| < \epsilon,$$

logo $\lim c_n = a$. ■

Dada uma sequência (a_n), dizemos que *"o limite de* (a_n) *é mais infinito"* e escrevemos $\lim a_n = \infty$ se dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $a_n > A$. Analogamente, $\lim a_n = -\infty$ se para todo $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $a_n < -A$.

Teorema 3.7 *Sejam* $(a_n)_{n\geq 1}$ *e* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sequências de números reais.*

(i) Se $\lim a_n = \infty$ *e* (b_n) *é limitada inferiormente, então* $\lim(a_n + b_n) = \infty$;

(ii) Se $\lim a_n = \infty$ *e* (b_n) *é limitada inferiormente por um real positivo, então* $\lim(a_n b_n) = \infty$;

(iii) Se $a_n \geq c > 0$, $b_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim b_n = 0$ *então* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$;

(iv) Se (a_n) *é limitada e* $\lim b_n = \infty$ *então* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

3.1.5 Mais alguns exemplos

Exemplo 3.12 *Considere a sequência* $(a_n)_{n\geq 1}$ *definida recursivamente por*

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{2 + a_n}{5}. \end{cases}$$

Assim, os três primeiros de (a_n) *serão*

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = \frac{2+3}{5} = 1$$
$$a_3 = \frac{2+a_2}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Vamos provar por indução que (a_n) é decrescente. O primeiro passo de indução é claro observando os elementos acima. Agora vamos supor que $a_k > a_{k+1}$ e provar que $a_{k+1} > a_{k+2}$. Temos

$$a_k > a_{k+1} \Rightarrow \frac{a_k}{5} > \frac{a_{k+1}}{5} \Rightarrow \frac{2+a_k}{5} > \frac{2+a_{k+1}}{5} \Rightarrow a_{k+1} > a_{k+2},$$

portanto (a_n) é decrescente. Logo (a_n) é limitado superiormente por a_1. E ainda, para todo $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2+a_{n-1}}{5} = \frac{2}{5} + \frac{a_{n-1}}{5} > \frac{2}{5}.$$

Daí (a_n) é limitada inferiormente. Então pelo Teorema da convergência monótona (a_n) converge. Seja p seu limite e vamos determinar p.

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{2+a_n}{5} \Rightarrow p = \frac{2+p}{5} \Rightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 3.13 *Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots)$, ou seja*

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_2 &= \sqrt{2+a_1} \\ a_3 &= \sqrt{2+a_2} \\ a_{n+1} &= \sqrt{2+a_n} \end{aligned}$$

Vamos mostrar que (a_n) é crescente. De fato,

$$0 < \sqrt{2} \Rightarrow 2 < 2+\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow a_1 < a_2.$$

Suponha por hipótese de indução $a_k < a_{k+1}$. Daí temos

$$a_k < a_{k+1} \Rightarrow 2+a_k < 2+a_{k+1} \Rightarrow \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+a_{k+1}} \Rightarrow a_{k+1} < a_{k+2}.$$

Mostremos agora que (a_n) é limitada. Como (a_n) é crescente então é limitada inferiormente por a_1 e ainda

$$a_1 = 2 < 4.$$

Suponha por hipótese de indução que $a_k < 4$. Daí

$$a_k < 4 \Rightarrow 2+a_k < 6 \Rightarrow \sqrt{2+a_k} < \sqrt{6} < 4 \Rightarrow a_{k+1} < 4.$$

Pelo Teorema da convergência monótona (a_n) é convergente. Seja $c = \lim a_n$. Então

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n} \Rightarrow c = \sqrt{2+c}, c \geq 0 \Rightarrow c = 2.$$

Exemplo 3.14 *Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $(3, 5, 7, 9, \ldots)$. O termo geral da sequência é $a_n = 2n+1$. A sequência (a_n) diverge para mais infinito. De fato, dado $A > 0$, como $\mathbb{N}$ é ilimitado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{A}{2}$. Daí se $n > n_0$, temos*

$$2n+1 > 2n_0+1 > 2n_0 > 2 \cdot \frac{A}{2} = A.$$

Exemplo 3.15 *Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a sequência $(a^n)_{n\geq 1}$, isto é, $(a, a^2, a^3, a^4, \ldots)$.*

- *Se $a = 1$ a sequência $(1, 1, 1, \ldots)$ converge para 1;*
- *Se $a = 0$ a sequência $(0, 0, 0, \ldots)$ converge para 0;*
- *Se $a = -1$ a sequência $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$ diverge;*
- *Se $a > 1$ então $a = 1 + t$, para algum $t > 0$, daí*

  $$a^n = (1+t)^n \geq 1 + nt > nt.$$

  Dado $A > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{A}{t}$, se $n > n_0$, temos

  $$a^n = (1+t)^n \geq 1 + nt > nt > n_0 t > \frac{A}{t} \cdot t = A,$$

  portanto (a_n) diverge para ∞;
- *Se $0 < a < 1$ então $0 < a^2 < a < 1$ e daí*

  $$a^n - a^{n+1} = \underbrace{a^n}_{>0}\underbrace{(1-a)}_{>0} > 0 \Rightarrow a^n > a^{n+1}, \forall\ n,$$

  logo (a_n) é decrescente e limitada inferiormente por 0. Pelo Teorema da convergência monótona, $a_n \to p \in \mathbb{R}$.

  $$p = \lim a^{n+1} = \lim a \cdot a^n = a \cdot \lim a^n = a \cdot p \Rightarrow p = ap \Rightarrow p(1-a) = 0 \Rightarrow p = 0.$$

- *Se $-1 < a < 0$ utilizaremos o resultado abaixo:*

  > *Se $(b_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais dada temos*
  >
  > $$|b_n| \to 0 \Rightarrow b_n \to 0.$$

  Daí,

  $$|a_n| = |a^n| = |a|^n,$$

  como $0 < |a| < 1$ já vimos que $|a_n| \to 0$. Portanto $a_n \to 0$.
- *Se $a < -1$, a sequência diverge.*

Exemplo 3.16 *Seja $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ e considere a sequência $(\sqrt[n]{a})_{n\geq 2}$, isto é,*

$$(\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \ldots).$$

Vejamos um exemplo

$$\sqrt{10} = 1 + 9$$
$$\sqrt[3]{10} = 1 + 3,64$$
$$\sqrt[4]{10} = 1 + 2,16$$
$$\sqrt[5]{10} = 1 + 1,57$$
$$\sqrt[10]{10} = 1 + 0,58$$
$$\sqrt[30]{10} = 1 + 0,16$$
$$\sqrt[60]{10} = 1 + 0,06$$
$$\sqrt[n]{10} = 1 + t_n,\ t_n > 0, n \geq 2.$$

Mostremos que a sequência $(t_n)_{n\geq 2}$ *é tal que* $t_n \to 0$. *Note que*

$$\sqrt[n]{10} = 1 + t_n \Rightarrow 100 = (1 + t_n)^n \geq 1 + nt_n \Rightarrow 1 + nt_n \leq 100.$$

Daí

$$1 < 1 + nt_n \leq 100 \Rightarrow 0 < nt_n \leq 99 \Rightarrow 0 < t_n \leq \frac{99}{n}.$$

Dado $\epsilon > 0$, *tome* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{99}$, *daí se* $n \geq n_0$

$$|t_n - 0| = |t_n| = t_n \leq \frac{99}{n} \leq \frac{99}{n_0} < 99 \cdot \frac{\epsilon}{99} = \epsilon.$$

Portanto $t_n \to 0$ *e daí* $(\sqrt[n]{100})_{n\geq 2}$ *converge para 1.*

- *Se* $a > 1$, $\sqrt[n]{a} \to 1$;
- *Se* $a = 1$, $\sqrt[n]{a} \to 1$;
- *Se* $a = 0$, $\sqrt[n]{a} \to 0$;
- *Se* $0 < a < 1$, $\sqrt[n]{a} \to 1$ *(faça um exemplo para se convencer!).*

Exemplo 3.17 *A sequência* $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 1}$ *converge para 1. (Verifique).*

Exemplo 3.18 *Considere a sequência* $(\sqrt[n]{1 + 2^n})_{n\geq 2}$. *Observe que*

$$2 = \sqrt[n]{2^n} < \sqrt[n]{1 + 2^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 2\sqrt[n]{2}.$$

Pelo Exemplo 3.16 $\sqrt[n]{2} \to 1$, *logo* $2\sqrt[n]{2} \to 2$, *portanto pelo Teorema do confronto*

$$\lim \sqrt[n]{1 + 2^n} = 2.$$

3.2 Séries numéricas

Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência. A **série** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ou simplesmente, $\sum_{n\geq 1} a_n$ é a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$, onde $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ para $n \geq 1$. O número real s_n é denominado a n-**ésima soma parcial** da série $\sum_{n\geq 1} a_n$ e dizemos que tal série **converge** para $s \in \mathbb{R}$ se a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ de suas somas parciais converge para s. Nesse caso, dizemos que a série é **convergente** e que s é a **soma** da série e escrevemos

$$\sum_{n\geq 1} a_n = s.$$

Se uma série não é convergente, dizemos que ela é **divergente**.

Observe que, se $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ então $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge se, e somente se $\sum_{n\geq 1} ka_n$ converge. De fato,

$$\sum_{n\geq 1} ka_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} ka_j = \lim_{n\to\infty} k \sum_{j=1}^{n} a_j = k \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j = k \cdot \sum_{n\geq 1} a_n.$$

Vejamos o que ocorre se temos a soma de duas séries. Considere as séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ e $\sum_{n\geq 1} b_n$ e sejam $(s_n)_{n\geq 1}$ e $(t_n)_{n\geq 1}$ suas respectivas sequências de somas parciais. A série soma das séries dadas será

$$\sum_{n\geq 1} (a_n + b_n),$$

onde a sequência de somas parciais é dada por $(x_n)_{n\geq 1}$, com

$$x_n = s_n + t_n.$$

Daí se $s_n \to s$ e $t_n \to t$ então $x_n \to s + t$. Portanto, utilizando os resultados de convergência de sequências vistos na seção anterior temos o seguinte quadro resumo da convergência da série soma:

+	converge	diverge
converge	converge	diverge
diverge	diverge	conv. ou div.

Exemplo 3.19 (Série geométrica) *Considere a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$. *Seja* $(s_n)_{n\geq 1}$ *a sequência de somas parciais. Vejamos se* (s_n) *converge ou diverge.*

$$s_{n-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-3} + a^{n-2} + a^{n-1}$$
$$as_{n-1} = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1} + a^n.$$

Subtraindo a segunda da primeira linha acima, temos

$$s_{n-1}(1-a) = 1 - a^n \Rightarrow s_{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}, \quad a \neq 1,$$

logo

$$s_n = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

e daí que (s_n) *converge se, e somente se* (a^n) *converge. Daí pelo Exemplo 3.15, se* $|a| < 1$ *então* $a^n \to 0$ *e portanto* $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ *converge e*

$$\lim s_n = \frac{1}{1-a}.$$

Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Exemplo 3.20 (Dízima periódica) *Considere a dízima periódica* $0,444\ldots = 0,4 + 0,04 + 0,004 + \ldots$. *Ou seja, estamos considerando a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{10^n} = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots = 4\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n},$$

que é uma série geométrica de razão $\frac{1}{10}$ *que está entre 0 e 1. Logo a série converge e pelo exemplo anterior*

$$0,444\ldots = 4\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = 4\left(\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{4}{9}.$$

Teorema 3.8 (Critério de convergência do termo geral) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração: Seja (s_n) a sequência de somas parciais da série dada. Daí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow (s_n) \quad \text{converge}.$$

Seja $s = \lim s_n$, daí $s = \lim s_{n+1}$, mas $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ e portanto

$$\lim s_{n+1} = \lim s_n + \lim a_{n+1} \Rightarrow \lim a_n = \lim a_{n+1} = s - s = 0.$$

■

O principal uso do teorema acima está na sua contrapositiva, ou seja se $\lim a_n \neq 0$ ou $\lim a_n$ não existe então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

A recíproca do Teorema 3.8 não é válida, ou seja, podemos ter uma série cujo limite do termo geral tende a zero, porém a série não converge, como veremos no exemplo abaixo.

Exemplo 3.21 (Série harmônica) *A série harmônica é a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$*, vamos considerar aqui um caso particular da série harmônica, a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Observe que $\frac{1}{n} \to 0$*, mas provaremos que a série não converge. De fato, seja* (s_n) *a sequência das somas parciais e note que*

$$1 = s_1 < s_2 = 1 + \frac{1}{2}; s_2 < s_3; \dots; s_n < s_{n+1},$$

logo (s_n) *é uma sequência crescente.* (s_n) *não é limitada superiormente, logo* (s_n) *diverge. Daí* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

Exemplo 3.22 *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ *diverge. De fato, analisando o termo geral da série temos*

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1} > 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1,$$

assim, se existir $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)$ *devemos ter* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right) \geq 1 > 0$*, logo pelo critério do termo geral, a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ *diverge.*

Teorema 3.9 *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se para todo* $\epsilon > 0$ *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \epsilon$, *para todos* $m \geq n \geq n_0$.

Demonstração: A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se sua sequência de somas parciais (s_n) converge, ou seja, se, e somente se (s_n) é de sequência de Cauchy, equivalentemente, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$, em particular $m > n > n_0$ temos

$$|s_m - s_n| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \epsilon.$$

■

Exemplo 3.23 *Vamos utilizar o teorema anterior para mostrar novamente que a série harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge. De fato, dado* $\epsilon < \frac{1}{2}$, *para qualquer* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tome* $n > n_0$ *e* $m = 2n$, *daí*

$$\left| \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} \right| = \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2} > \epsilon.$$

3.2.1 Testes de convergência

Teorema 3.10 (Teste de comparação) *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries com termos gerais* a_n, b_n *e* $b_n > 0$. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é majorada por* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *isto é, se existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > n_0$, $|a_n| < b_n$, *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, a sequência de suas somas parciais converge e daí que é de Cauchy, logo existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_1$ então

$$\sum_{j=n+1}^{m} b_j < \epsilon.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é majorada por $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_2$ então $|a_n| \leq b_n$. Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, daí se $m > n > n_0$ temos

$$\left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n+1}^{m} b_j < \epsilon.$$

Logo a sequência das somas parcias de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é de Cauchy e portanto converge.

■

Corolário 3.4 *Nas condições do teorema anterior, se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Exemplo 3.24 (Série p) *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, *para* $p \in \mathbb{R}$ *diverge se* $0 < p \leq 1$. *De fato,*

$$0 < p < 1 \Rightarrow n^p \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}, \forall\ n \geq 1,$$

daí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *é majorante de* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, *que é divergente, logo* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *diverge.*

Proposição 3.4 (Critério das séries alternadas (Leibniz)) *Se* $(a_n)_{n\geq 1}$ *é uma sequência não crescente de reais positivos tal que* $a_n \to 0$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *é convergente.*

Demonstração: Seja (s_n) a sequência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. Vejamos alguns termos da sequência (s_n)

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 - a_2 \\ s_3 &= a_1 - a_2 + a_3 \\ s_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ s_5 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5. \end{aligned}$$

Como (a_n) é não crescente,

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \ldots \geq s_6 \geq s_4 \geq s_2.$$

Por outro lado, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$|s_{2m-1} - s_{2m}| = a_{2m} \to 0.$$

Logo (s_n) é de Cauchy, e portanto convergente. ■

Exemplo 3.25 *Considere a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. *Note que*

- $\frac{1}{n} > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim a_n = 0$;
- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *é não crescente.*

Portanto pelo critério das séries alternadas a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *converge.*

Proposição 3.5 (Teste da condensação de Cauchy) *Se* $(a_n)_{n\geq 1}$ *é uma sequência não crescente de reais não negativos então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se* $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$ *converge.*

Exemplo 3.26 (Série p) *A série* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, *para* $p \in \mathbb{R}$ *converge se* $p > 1$. *De fato, vamos utilizar o teste de condensação de Cauchy para provar:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \frac{1}{(2^j)^p} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2^j)^{p-1}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^j} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2^{p-1})}\right)^j,$$

que é a série geométrica e $0 < \frac{1}{2^{p-1}} < 1$, *logo a série converge e pelo teste da condensação de Cauchy, segue que* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ *converge.*

Definição 3.3 *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***converge absolutamente*** *(ou é* ***absolutamente convergente****) se* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *converge.*

Teorema 3.11 *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Exemplo 3.27 *Considere a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\operatorname{sen} n}{n^2}$. *Note que*

$$\left|\frac{3+\operatorname{sen} n}{n^2}\right| \leq \frac{3+|\operatorname{sen} n|}{n^2} \leq \frac{4}{n^2}, \forall\ n \geq 1.$$

Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{3+\operatorname{sen} n}{n^2}\right|$ *é majorada pela série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ *que é convergente. Logo* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{3+\operatorname{sen} n}{n^2}\right|$ *é convergente e pelo teorema anterior* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\operatorname{sen} n}{n^2}$ *converge.*

A recíproca do Teorema 3.11 não é verdadeira. De fato, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge como vimos no Exemplo 3.25, porém $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Proposição 3.6 (Teste da razão (D'Alembert)) *Considere a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e seja* $\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. *Então*

- $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge;*
- $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Se $\ell = 1$ *o teste é inconclusivo.*

Demonstração: Vamos provar o resultado para o caso em que $\ell < 1$. Neste caso, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\ell < b < 1$. Daí $b - \ell > 0$ e como $\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, para $\epsilon = b - \ell$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$,

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \ell\right| < b - \ell \Rightarrow -b + \ell < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \ell < b - \ell \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < b,$$

onde b é um número real tal que $\ell < b$ e $n \geq n_0$. Daí, para todo $n \geq n_0$, temos $|a_{n+1}| \leq b|a_n|$, isto é

$$\begin{aligned} &|a_{n_0+1}| \leq b|a_{n_0}| \\ &|a_{n_0+2}| \leq b|a_{n_0+1}| \leq b^2|a_{n_0}| \\ &\vdots \\ &|a_{n_0+p}| \leq b^p|a_{n_0}|. \end{aligned}$$

Logo $\sum_{p=1}^{\infty} a_{n_0+p}$ é majorada por $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{n_0}|b^p$ que é uma série geométrica de razão b, com $0 < b < 1$, portanto convergente. Logo pelo teste de comparação $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

Proposição 3.7 (Teste da raiz (Cauchy)) *Considere a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e seja* $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Então*

- $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge;*
- $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Se $\ell = 1$ *o teste é inconclusivo.*

3.3 Exercícios

(1) Determine o termo geral a_n das sequências a seguir:

(a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

(b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{120} \ldots$

(2) Dê exemplos de:

(a) uma sequência limitada superiormente mas que não é limitada inferiormente;

(b) uma sequência limitada inferiormente mas que não é limitada superiormente;

(c) uma sequência divergente que possui subsequência convergente;

(a) uma sequência monótona que não é convergente;

(b) uma sequência limitada que não é convergente;

(c) uma sequência que não seja limitada mas que possui subsequência convergente.

(3) Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ em $\mathbb{R}$, mostre que:

(a) $ka_n \to ka, \quad k \in \mathbb{R}$;

(b) $a_n + b_n \to a + b$;

(c) $a_n b_n \to ab$;

(d) $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ desde que $b \neq 0$.

(4) Mostre que se $\lim a_n = 0$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada então $\lim (a_n \cdot b_n) = 0$.

(5) Seja p um número real positivo fixado. Mostre que:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se} \quad p > 1 \\ 1, & \text{se} \quad p = 1 \\ 0, & \text{se} \quad 0 \leq p < 1 \end{cases}; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se} \quad p > 1 \\ 0, & \text{se} \quad 0 \leq p \leq 1 \end{cases}.$$

(6) Em cada um dos itens abaixo, a_n é o termo geral da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Utilize a definição de limite de uma sequência para mostrar que $\lim a_n = 3$.

(a) $a_n = \dfrac{3n^2 + 4n}{n^2 + n - 4}$;

(b) $a_n = \dfrac{3n\sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 5}$;

(c) $a_n = \dfrac{3n}{n + \operatorname{sen}(2n)}$.

(7) Se $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$ prove que $a_n \to 0$.

(8) Se $0 < a_1 < 1$ e se $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$, para todo $n \geq 1$, prove que $(a_n)_{n\geq 1}$ é decrescente com limite 0. Prove também que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{1}{2}$.

(9) Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ mostre que $|a_n - b_n| \to |a - b|$.

(10) Mostre que se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de termos positivos e $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$ então $\lim a_n = 0$.

(11) Mostre que as sequências abaixo convergem para 0, onde $a > 1$ e $k \in \mathbb{N}$.

(a) $\left(\dfrac{n^k}{a^n}\right)_{n\geq 1}$;

(b) $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\geq 1}$;

(c) $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\geq 1}$.

(12) Uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfaz $7a_{n+1} = a_n^3 + 6$, para $n \geq 1$.

(a) Se $a_1 = \frac{1}{2}$, prove que $(a_n)_{n\geq 1}$ é crescente;

(b) Encontre seu limite;

(c) O que ocorre se $a_1 = \frac{3}{2}$ ou $a_1 = \frac{5}{2}$.

(13) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a, b > 0$. Mostre que

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \to \max\{a, b\}.$$

(14) Calcule $\lim a_n$, sendo $a_{n+1} = \dfrac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}$, $n \geq 1$. A sequência é monótona?

(15) Considere a sequência de racionais $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right), \ n \geq 1.$$

(a) Mostre que $a_n \geq \sqrt{3}$, $\forall\, n \geq 1$ *(Utilize o fato de que a média arimética entre dois números é sempre maior ou igual que a média geométrica)* ;

(b) Mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ é monótona não crescente;

(c) Conclua que $(a_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy porém não converge para um número racional.

(16) Coloque **V** para as afirmações verdadeira e **F** para as falsas. Prove ou dê contra-exemplos em cada uma das afirmações.

(a) ( ) Toda sequência limitada é convergente.;

(b) ( ) Toda sequência constante é de Cauchy;

(c) ( ) A sequência $\sqrt{6}, \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \ldots$ é convergente e seu limite é um número inteiro;

(d) ( ) Seja (a_{n_j}) uma subsequência de (a_n). Se $\lim a_{n_j} = a$ então $\lim a_n = a$;

(e) ( ) A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, onde $a_n = \dfrac{n}{n+2}$, converge para 1.

(17) O que significa dizer que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente?

(18) (a) Mostre que a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, com $|a| < 1$ converge;

(b) Mostre utilizando uma série numérica que $0,666\ldots = \dfrac{2}{3}$.

(19) Considere a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k^n}$, onde k é uma constante real positiva. Discuta a convergência ou divergência da série em termos do parâmetro k.

(20) Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, onde $a_n = \dfrac{2^n n!(1-\cos n^2)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}$. Mostre que:

(a) $0 \leq a_n \leq \dfrac{2^n n!}{5\cdot 8\ldots(3n-1)}$ para todo $n \geq 1$;

(b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(21) Mostre que o termo geral da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ tem limite igual a zero. A série dada converge?

(22) Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ definida por

$$a_1 = 3; \quad a_{n+1} = \frac{na_n}{2n+1}, \ \ n \geq 1.$$

(a) Mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ verifica as condições do Teorema da Convergência Monótona;

(b) Calcule o limite;

(c) O que se pode afirmar sobre a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(23) Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ duas sequências de números reais satisfaendo as seguintes condições:

(i) A sequência $(s_n)_{n\geq 1}$, definida para $n \in \mathbb{N}$ por $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, é limitada;

(ii) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots > 0$ e $b_n \to 0$.

(a) Prove que a série $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$ converge.

(b) Utilize o item anterior para provar que a série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

(24) Verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log\, n}$;

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{15n + \sqrt{n^2-1}}{5n^3 + 2n\sqrt{n+1} - 17}$;

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n\sqrt{n+1}}{n^2-3}$;

(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2 a^n}{2^{n^2}}, \quad a \neq 0$;

(f) $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen}(3n^2)}{n^2 - \sqrt{n+9}}$;

(g) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

(25) Dado um número real $a > 1$, prove que a série $\sum_{k\geq 1} \frac{2k-1}{a^k}$ é convergente e calcule sua soma.

(26) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência de números reais positivos definida por $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Prove que a série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{a_k + 1}$ converge e

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{a_k + 1} = 2.$$

(27) A série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}+\ldots$$

possui termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende a zero. Entretanto é divergente. Por que isso não contradiz o Teste de Leibniz?

(28) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}=\frac{1}{a+1}$.

(29) O número e é dado por

$$e=\lim\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Mostre que, de fato, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ converge para um número entre 2 e 3.

(30) Seja A um conjunto finito de naturais da forma $2^a3^b5^c$, para algum terno (a,b,c) de inteiros não negativos. Prove que

$$\sum_{x\in A}\frac{1}{x}<4.$$

CAPÍTULO 4

NOÇÕES TOPOLÓGICAS

Neste capítulo apresentaremos algumas noções topológicas básicas que serão importantes no Capítulo 5. Acreditamos que este será o primeiro contato dos estudantes com conceitos topológicos mais formalizados, então além de apresentar conceitos de maneira mais elementar, omitiremos alguns resultados e demonstrações. Sugerimos uma leitura do capítulo 5 de [4] para mais detalhes, onde o autor traz uma seção sobre o conjunto de Cantor, um interessante tópico matemático que será omitido neste material.

Definição 4.1 *Sejam $A, F \subset \mathbb{R}$.*

- *Um ponto $p \in A$ é um **ponto interior** de A se existe $\epsilon > 0$ tal que $(p-\epsilon, p+\epsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de A é chamado **interior** de A e é denotado por A°. Isto é,*

$$A^\circ = \{p \in A : \ p \quad \text{é ponto interior de} \quad A\} \subset A;$$

- *A é **conjunto aberto** se todos os seus pontos são pontos interiores, isto é, se $A = A^\circ$;*
- *F é **conjunto fechado** se seu complementar $F^c = \mathbb{R} - F$ é aberto.*

Exemplo 4.1 *$\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são abertos.*

Exemplo 4.2 *$\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são fechados, já que $\emptyset^c = \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^c = \emptyset$ são abertos.*

Exemplo 4.3 *$(3,7) = \{x \in \mathbb{R} : \ 3 < x < 7\}$ é aberto.*

De fato, seja $x \in (3,7)$. Tome $r = min\{7-x, x-3\}$. Mostremos que $(x-r, x+r) \subset (3,7)$ e portanto que $(3,7)$ é um conjunto aberto. Dado $y \in (x-r, x+r)$, temos

$$y < x + r \leq x + 7 - x = 7 \Rightarrow y \leq 7 \quad e$$

$$y > x - r \geq x - x + 3 = 3 \Rightarrow y > 3.$$

Portanto $y \in (3, 7)$*, e daí* $(x - r, x + r) \subset (3, 7)$.

Proposição 4.1 *Se* A *e* B *são abertos então* $A \cap B$ *é aberto.*

Demonstração: Se $A \cap B = \emptyset$, nada temos a fazer, pois $\emptyset$ já é aberto. Do contrário, se $A \cap B \neq \emptyset$, seja $a \in A \cap B$. Daí,

$$a \in A \quad \text{que é aberto por hipótese} \quad \Rightarrow \exists\ r > 0 :\ (a - r, a + r) \subset A;$$

$$a \in B \quad \text{que é aberto por hipótese} \quad \Rightarrow \exists\ s > 0 :\ (a - s, a + s) \subset B;$$

Seja $\epsilon = \min\{r, s\}$. Daí se $y \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ então

$$a - r \leq a - \epsilon < y < a + \epsilon \leq a + r \Rightarrow y \in A \quad \text{e}$$

$$a - s \leq a - \epsilon < y < a + \epsilon \leq a + s \Rightarrow y \in B.$$

Portanto $y \in A \cap B$ e daí $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset A \cap B$. ■

Mais geral, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos abertos, então $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ é um conjunto aberto.

Proposição 4.2 *Se* A_α *é aberto, para todo* α *em uma família* Γ *de índices, então* $\bigcup_{\alpha} A_\alpha$ *é aberto.*

Demonstração: Se $x \in \bigcup_{\alpha} A_\alpha$ então $x \in A_\beta$ para algum $\beta \in \Gamma$. Como A_β é aberto, existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha} A_\alpha$. Portanto $\bigcup_{\alpha} A_\alpha$ é aberto. ■

Exemplo 4.4 *O intervalo* $[1, 3] = \{x \in \mathbb{R} :\ 1 \leq x \leq 3\}$ *é um conjunto fechado. De fato,*

$$[1, 3]^c = \underbrace{(-\infty, 1)}_{aberto} \cup \underbrace{(3, \infty)}_{aberto} \quad \text{é aberto} \quad \Rightarrow [1, 3] \quad \text{é fechado.}$$

Proposição 4.3 *Todo conjunto finito de números reais é fechado.*

Demonstração: Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$. Mostremos que A^c é aberto. Seja $p \in A^c$ e considere

$$\epsilon = \min\{|p - a_1|, |p - a_2|, \ldots, |p - a_n|\}.$$

Daí $(p-\epsilon, p+\epsilon) \subset A^c$ e portanto A^c é aberto. De fato, se $y \in (p-\epsilon, p+\epsilon)$, então $p-\epsilon < y < p+\epsilon$. Se y não pertencesse a A^c então y pertenceria a A, logo $y = a_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$. Isto é,

$$p-\epsilon < a_i < p+\epsilon \Rightarrow -\epsilon < -p+a_i < \epsilon \Rightarrow |p-a_i| = |-p+a_i| < \epsilon.$$

Absurdo, pois $\epsilon \leq |p-a_i|$, para todo $i = 1, \ldots, n$. ■

Proposição 4.4 *Se A e B são fechados então $A \cup B$ é fechado.*

Demonstração: Se A e B são fechados então A^c e B^c são abertos. Logo utilizando a lei de De Morgan da teoria dos conjuntos e a Proposição 4.1 temos que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{é aberto} \quad \Rightarrow A \cup B \quad \text{é fechado.}$$

■

Definição 4.2 *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$. Dizemos que p é **ponto aderente** a A se para todo $\epsilon > 0, (p-\epsilon, p+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Equivalentemente, p é aderente a A se p é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in A$.*

Exemplo 4.5 $A = (1, 2] \cup \{3\}$

- 0 *não é aderente a A, pois* $(0-\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}) \cap A = \emptyset$;
- 3 *é ponto aderente a A, pois para qualquer* $\epsilon > 0$, $(3-\epsilon, 3+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$, *já que* $3 \in (3-\epsilon, 3+\epsilon) \cap A$;
- 2 *é ponto aderente a A, pois para qualquer* $\epsilon > 0$, $(2-\epsilon, 2+\epsilon) \cap A \supset \{2\}$;
- 1 *é ponto aderente a A, pois para qualquer* $\epsilon > 0$, $(1-\epsilon, 1+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$, *já que* $\left(1 + \dfrac{\epsilon}{\epsilon+1}\right) \in (1-\epsilon, 1+\epsilon) \cap A$.

O conjunto dos pontos aderentes a A é chamado **fecho** de A e é denotado por $\overline{A}$.

Proposição 4.5 *Seja $A \subset \mathbb{R}$. O conjunto A é fechado se, e somente se $A = \overline{A}$.*

Demonstração: Suponha $A \subset \mathbb{R}$ fechado. É claro que $A \subset \overline{A}$. Resta mostrarmos que $\overline{A} \subset A$. Dado $a \in \overline{A}$, se a não pertencesse a A, então teríamos $a \in A^c$, que é aberto já que A é fechado. Logo existiria $r > 0$ tal que $(a-r, a+r) \subset A^c$ e daí $(a-r, a+r) \cap A = \emptyset$, um absurdo, já que $a \in \overline{A}$.

Reciprocamente, dado $a \in A^c$, $a \notin A = \overline{A}$. Logo existe $\epsilon > 0$ tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap A = \emptyset$ e daí $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset A^c$. Portanto A^c é aberto e então A é fechado. ■

Exemplo 4.6 *Vamos determinar o fecho de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dado $p \in \mathbb{R}$, temos*

- *se $p \in \mathbb{Q}$ então é claro que $p \in \overline{\mathbb{Q}}$;*
- *se p é irracional então para todo $\epsilon > 0$ sempre teremos $(p-\epsilon, p+\epsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.*

Portanto todo número real é aderente a $\mathbb{Q}$ e daí $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Definição 4.3 *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que A é **denso** em $\mathbb{R}$ se $\overline{A} = \mathbb{R}$.*

Definição 4.4 *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$. Dizemos que p é **ponto de acumulação** de A se, para todo $\epsilon > 0$ tivermos $\{(p-\epsilon, p+\epsilon) - \{p\}\} \cap A \neq \emptyset$.*

Exemplo 4.7 $A = (1, 2] \cup \{3\}$.

- 0 *não é ponto de acumulação;*
- 1 *é ponto de acumulação;*
- 2 *é ponto de acumulação;*
- 3 *não é ponto de acumulação. Neste caso, dizemos que* 3 *é um **ponto isolado**, pois pertence ao conjunto, mas não é de acumulação.*

Quando todos os pontos de um conjunto A são pontos isolados, dizemos que A é um **conjunto discreto**.

Denotaremos por A' o conjunto dos pontos de acumulação de A e o chamaremos de **conjunto derivado** de A.

A definição de limite de uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ de números reais, vista em 3.1.1, pode agora ser dada fazendo uso de conjuntos abertos como segue:

$$\lim a_n = a \Leftrightarrow (\forall\ A \subset \mathbb{R} \quad \text{aberto com} \quad a \in A, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} :\ n > n_0 \Rightarrow a_n \in A).$$

Teorema 4.1 *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) a é um ponto de acumulação de X;

(ii) a é limite de uma sequência de pontos $(a_n)_{n\geq 1}$, com $a_n \in X - \{a\}$;

(iii) Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X.

Demonstração: Vamos provar a seguinte sequência de implicações

$$(iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii).$$

Observe que não temos nada a provar em $(iii) \Rightarrow (i)$, pois segue direto da definição de ponto de acumulação.

Mostremos que $(i) \Rightarrow (ii)$. Como a é ponto de acumulação de X então $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap \{X - \{a\}\} \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$. Daí para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos um $a_n \in (a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}) \cap \{X - \{a\}\}$ e com esse processo construímos uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de pontos de $X - \{a\}$ tais que $|a_n - a| < \frac{1}{n}$. Logo $a_n \to a$.

Para mostrar que $(ii) \Rightarrow (iii)$ considere um intervalo aberto centrado em a, $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, $\epsilon > 0$. Como $a_n \to a$ para tal ϵ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|a_n - a| < \epsilon$, isto é $a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Se tivéssemos um número finito de a_n satisfazendo tal condição, existiria um a_{n_1} que se repetiria infinitas vezes e daí a sequência ficaria constante com limite $a_{n_1} \neq a$. Uma contradição. ■

Definição 4.5 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se **compacto** quando é limitado e fechado.*

Exemplo 4.8 *Todo conjunto finito de números reais é compacto.*

Exemplo 4.9 *Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, o intervalo $[a, b]$ é compacto enquanto (a, b) não é compacto.*

Teorema 4.2 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.*

Demonstração: Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, toda sequência de pontos em X é limitada, logo pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência convergente. Seja p o limite dessa subsequência. Daí p é aderente a X. Mas X é fechado, logo $p \in \overline{X} = X$.

Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda sequência de pontos $a_n \in X$ possui uma subsequência que converge para um ponto de X. X é limitado, do contrário, para cada

$n \in \mathbb{N}$ poderíamos encontrar $a_n \in X$ com $|a_n| > n$. A sequência (a_n) neste caso, não possuiria subsequência limitada, logo não teria subsequência convergente. E ainda, X é fechado, do contrário, existiria $a \in \overline{X} - X$ com $a = \lim a_n$, onde cada $a_n \in X$. A sequência (a_n) não possuiria então subsequência convergente para um ponto de X. Portanto X é compacto. ■

Definição 4.6 *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que um conjunto*

$$\mathscr{A} = \{A_\alpha : \ A_\alpha \quad \text{é conjunto aberto}\}$$

*é uma **cobertura** para A se $A \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$.*

Exemplo 4.10 *$\mathscr{A} = \{(n, n+2) : \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ é uma cobertura para o conjunto dos números reais positivos.*

Definição 4.7 *Dada uma cobertura $\mathscr{A}$ de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, dizemos que uma subfamília de $\mathscr{A}$ que ainda é uma cobertura para A é uma **subcobertura** para A. E ela é dita **subcobertura finita** quando escolhemos uma subcoleção finita de abertos da família $\mathscr{A}$.*

Teorema 4.3 (Borel-Lebesgue) *Toda cobertura por abertos de um conjunto compacto possui uma subcobertura finita. Reciprocamente, se toda cobertura por abertos de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ possui uma subcobertura finita, então X é compacto.*

4.1 Exercícios

(1) Mostre que se F_α é fechado para todo $\alpha \in \Gamma$ então $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha$ é fechado.

(2) Sejam $F \subset \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de pontos de F. Suponha $x_n \to p$. Mostre que, se F é fechado então $p \in F$.

(3) Suponha que F seja um conjunto fechado que contenha todos os racionais do intervalo $[1, 3]$. Mostre que F contém todo o intervalo $[1, 3]$.

(4) Mostre que $p \in \overline{A}$ se, e somente se, existe $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $x_n \in A$ e $x_n \to p$.

(5) Se A é um subconjunto dos reais limitado e não vazio, mostre que $a = \inf A$ e $b = \sup A$ são pontos aderentes de A. Conclua que, se X é compacto então X possui elemento máximo e elemento mínimo.

(6) Sob que condição $\sup A$ é ponto de acumulação de A?

(7) Mostre que $X = \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ não é compacto.

(8) Mostre que $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots : \ n \in \mathbb{N}^*\}$ é compacto.

(9) Mostre que o fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado.

(10) Mostre que o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é fechado, mas não é compacto.

(11) Prove que para quaisquer $A, B \subset \mathbb{R}$:

(a) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$;

(b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(12) Seja $X \subset \mathbb{R}$. A **fronteira** de X é o subconjunto formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que todo subconjunto aberto que contém x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R} - X$. Notação: frX.

(a) Determine a fronteira dos seguintes conjuntos: $X = [0, 1]$, $Y = (0, 1) \cup (1, 2)$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$.

(b) Mostre que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, vale $\overline{X} = X \cup frX$. Conclua que X é fechado se, e somente se, $X \supset frX$.

(13) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Mostre que:

(a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

(b) $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

(14) Mostre que todo ponto de um conjunto aberto é ponto de acumulação.

(15) Mostre que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, X' é um conjunto fechado.

(16) Mostre que:

(a) uma reunião finita de conjuntos compactos é um conjunto compacto;

(b) uma interseção arbitrária de conjuntos compactos é um conjunto compacto;

CAPÍTULO 5

FUNÇÕES

Encerraremos essas notas com um capítulo onde apresentaremos os principais resultados envolvendo limites e continuidade de funções. Diferente de grande parte das referências indicadas neste material, não faremos um exposição sobre a definição e os conceitos básicos de função. Assim como em [4] iniciaremos já falando de limites. Para uma breve revisão sobre funções sugerimos [1, 5]. Omitiremos algumas demonstrações e até mesmo alguns resultados comuns em cursos de análise real. Para estes sugerimos uma leitura mais detalhada dos capítulos 6 e 7 de [4] ou uma consulta a [5].

5.1 Limites de funções

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real com domínio X. Se $a \in X'$, isto é, a é um ponto de acumulação de X, dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o **limite de** $f(x)$ quando x tende a a e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x)-L| < \epsilon$, isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 :\ x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Exemplo 5.1 *Vamos mostrar que* $\lim_{x \to 2}(-2x + 7) = 3$. *De fato, dado* $\epsilon > 0$, *tome* $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$. *Daí, se* $x \in \mathbb{R}$ *e* $0 < |x - 2| < \delta$, *temos*

$$| - 2x + 7 - 3| = | - 2x + 4| = | - 2(x - 2)| = 2|x - 2| < 2 \cdot \delta \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Exemplo 5.2 *Mostremos que* $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$. *De fato, dado* $\epsilon > 0$, *tome* $\delta \leq \sqrt{9+\epsilon} - 3$. *Se* $x \in \mathbb{R}$ *e* $0 < |x-3| < \delta$ *temos*

$$\begin{aligned} |x^2 - 9| &= |x+3||x-3| < \delta|x+3| \\ &= \delta|x-3+6| \leq \delta(|x-3|+6) \\ &< \delta(\delta+6) = \delta^2 + 6\delta \\ &\leq 9 + \epsilon - 6\sqrt{9+\epsilon} + 9 + 6\sqrt{9+\epsilon} - 18 = \epsilon. \end{aligned}$$

Exemplo 5.3 *Vamos mostrar que* $\lim_{x\to 6} \dfrac{5}{x-1} = 1$. *De fato, dado* $\epsilon > 0$, *tome* $\delta = min\{4\epsilon, 1\}$, *daí se* $|x-6| < \delta$, *então é claro que*

$$|x-6| < 1 \Rightarrow 4 < x-1 < 6 \Rightarrow |x-1| > 4 \Rightarrow \frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{4}$$

e portanto teremos

$$\left|\frac{5}{x-1} - 1\right| = \frac{|x-6|}{|x-1|} < \delta \cdot \frac{1}{4} \geq \frac{4\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Teorema 5.1 *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$. *Se* $L < M$ *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < g(x)$ *para todo* $x \in X$ *com* $0 < |x-a| < \delta$.

Corolário 5.1 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L < M$ *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < M$ *para todo* $x \in X$ *com* $0 < |x-a| < \delta$.

Corolário 5.2 *Sejam* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$. *Se* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in X - \{a\}$ *então* $L \leq M$.

Teorema 5.2 (Teorema do confronto) *Sejam* $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$. *Se* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *para todos* $x \in X - \{a\}$, *então* $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

Observação 5.1 *A noção de limite é* ***local****, logo para os resultados vistos valerem é suficiente que exista uma vizinhança de a em que as condições dos resultados sejam satisfeitas.*

Teorema 5.3 *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $a \in X'$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\ (x_n)_{n\geq 1} \subset X - \{a\} \quad com \quad \lim x_n = a \quad tenha\text{-}se \quad \lim f(x_n) = L.$$

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência em $X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$. Para tal δ, existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $0 < |x_n - a| < \delta$. Logo se $n > n_0$ então $|f(x_n) - L| < \epsilon$, isto

é, $\lim f(x_n) = L$.

Reciprocamente, suponha por absurdo que $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$. Daí, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ com $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, mas $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Logo existiria uma sequência (x_n), de termos em $X - \{a\}$, com $\lim x_n = a$, mas $\lim f(x_n) \neq L$. O que contradiz a hipótese. Portanto $\lim_{x\to a} f(x) = L$. ■

Corolário 5.3 (Unicidade do limite) *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} f(x) = M$ então $L = M$.*

Corolário 5.4 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, com $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Então*

(i) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

Observação 5.2 *Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada numa vizinhança de a tem-se*

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Teorema 5.4 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se existe $\lim_{x\to a} f(x)$ então f é limitada numa vizinhança de a, isto é, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que se $x \in X, 0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x)| \leq c$.*

Demonstração: Seja $L = \lim_{x\to a} f(x)$. Para $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ então

$$|f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|.$$

Tome $c = 1 + |L|$. ■

Definição 5.1 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $X \cap (a, a+\epsilon) \neq \emptyset$, para todo $\epsilon > 0$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é **limite à direita** de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $L = \lim_{x\to a^+} f(x)$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$, isto é*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 :\ x \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Definição 5.2 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $X \cap (a-\epsilon, a) \neq \emptyset$, para todo $\epsilon > 0$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é* ***limite à esquerda*** *de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $L = \lim_{x \to a^-} f(x)$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $-\delta < x - a < 0$ então $|f(x) - L| < \epsilon$, isto é*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 :\ x \in X \cap (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Dado $a \in X'$, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Exemplo 5.4 *Seja $\lfloor \quad \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a* ***função menor inteiro****, isto é, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ = maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo*

$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1,9 \rfloor = 1, \quad \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 0, \quad \lfloor 5,1 \rfloor = 5.$$

Note que se $a \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to a^+} \lfloor x \rfloor = a \quad e \quad \lim_{x \to a^-} \lfloor x \rfloor = a - 1.$$

Se $a \notin \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to a^+} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor \quad e \quad \lim_{x \to a^-} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

Definição 5.3 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, escreve-se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, quando o número real L satisfaz:*

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ A > 0 :\ x \in X \quad e \quad x > A \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é ilimitado inferiormente

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\ \epsilon > 0, \exists\ A > 0 :\ x \in X \quad e \quad x < -A \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \epsilon).$$

Exemplo 5.5 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$;

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, *mas* $\lim_{x \to \infty} e^x$ *não existe no sentido da definição dada anteriormente.*

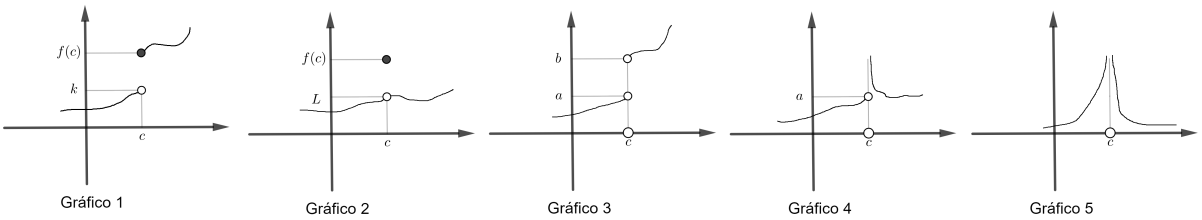
Definição 5.4 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f : X \to \mathbb{R}$.*

- $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ *quando, para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) > A$;*
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ *quando, para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) < -A$.*

5.2 Funções contínuas

Definição 5.5 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita* ***contínua*** *em $c \in X$ se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, isto é, se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que dado $x \in X$ e $|x - c| < \delta$ então $|f(x) - f(c)| < \epsilon$. E dizemos que f é uma função* ***contínua*** *se for contínua em todos os pontos de X.*

Exemplo 5.6 *Nos gráficos abaixo de uma função $f(x)$ de domínio D_f, vamos analisar a continuidade de f em c.*



- *Gráfico 1:*
  $c \in D_f$, *logo existe $f(c)$. Note que, quando $x \to c^+$, $f(x) \to f(c)$, então $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ (continuidade em c à direita). Por outro lado, quando $x \to c^-$, $f(x) \to k$, então $\lim_{x\to c^-} f(x) = k$. Portanto não existe $\lim_{x\to c} f(x)$, pois os limites laterais são distintos e daí segue que f não é contínua em c.*

- *Gráfico 2:*
  $c \in D_f$, *logo existe $f(c)$. Note que, quando $x \to c^+$, $f(x) \to L$, então $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$. E quando $x \to c^-$, $f(x) \to L$, então $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. Portanto existe $\lim_{x\to c} f(x) = L$, mas $L \neq f(c)$ e daí segue que f não é contínua em c.*

- *Gráfico 3:*
  $c \notin D_f$, *logo não existe $f(c)$ (isso já é suficiente para não termos a continuidade em c). Mas note ainda que, quando $x \to c^+$, $f(x) \to b$, então $\lim_{x\to c^+} f(x) = b$. E quando $x \to c^-$, $f(x) \to a$, então $\lim_{x\to c^-} f(x) = a$. Portanto não existe $\lim_{x\to c} f(x)$.*

- *Gráfico 4:*
  $c \notin D_f$, *logo não existe $f(c)$ (isso já é suficiente para não termos a continuidade em c). Note ainda que, quando $x \to c^+$, $f(x) \to \infty$, então $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$. E quando $x \to c^-$, $f(x) \to a$, então $\lim_{x\to c^-} f(x) = a$. Portanto não existe $\lim_{x\to c} f(x)$.*

- *Gráfico 5:*
  $c \notin D_f$, *logo não existe $f(c)$ (isso já é suficiente para não termos a continuidade em c). Além disso, quando $x \to c^+$, $f(x) \to \infty$, então $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$. E quando $x \to c^-$, $f(x) \to \infty$, então $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$. Portanto $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$.*

Exemplo 5.7 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x - 8$. Temos que f é contínua em $x = 3$, pois $f(3) = 7$ e $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta \leq \frac{\epsilon}{5}$, se $|x - 3| < \delta$, então*

$$|f(x) - 7| = |5x - 15| = 5|x - 3| < 5 \cdot \delta \leq 5 \cdot \frac{\epsilon}{5} = \epsilon.$$

Exemplo 5.8 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.*

- *f é contínua em $x = 2$, pois $f(2) = 4$ e $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$, daí se $|x - 2| < \delta$, temos*

$$|x^2 - 4| = |x + 2||x - 2| < |x + 2| \cdot \delta \underbrace{<}_{(*)} 5 \cdot \frac{\epsilon}{5} = \epsilon,$$

onde $(*)$ ocorre pois

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow -1 \leq x - 2 < 1 \Rightarrow 3 < x + 2 < 5 \Rightarrow |x + 2| < 5.$$

- *f é contínua em $x = c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. É claro que $f(c) = c^2$, mostremos que $\lim_{x\to c} f(x) = c^2$. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = min\{1, \frac{\epsilon}{1+2|c|}\}$, se $|x - c| < \delta$, temos*

$$-1 < x-c < 1 \Rightarrow -1+2c < x+c < 1+2c \Rightarrow -1-2|c| < x+c < 1+2|c| \Rightarrow |x+c| < 1+2|c|,$$

daí

$$|x^2 - c^2| = |x + c||x - c| < (1 + 2|c|) \cdot \frac{\epsilon}{(1 + 2|c|)} = \epsilon.$$

Proposição 5.1 *Dadas as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se g é contínua em a e f é contínua em $b = g(a)$ então $f \circ g$ é contínua em a.*

Proposição 5.2 (Definição qualitativa de continuidade) *Uma função f é contínua em $c \in D_f$ se, e somente se para toda sequência $(x_n)_{n\geq 1}, x_n \in D_f$ tal que $x_n \to c$ tivermos $f(x_n) \to f(c)$.*

Demonstração: Seja f uma função contínua em $c \in D_f$. Dada uma sequência (x_n) de pontos em D_f convergindo para $c \in \mathbb{R}$, vamos mostrar que $f(x_n) \to f(c)$. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - c| < \delta$ então $|f(x) - f(c)| < \epsilon$. Como $x_n \to c$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|x_n - c| < \delta$. Logo, para $n > n_0$, temos

$$|x_n - c| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(c)| < \epsilon.$$

Reciprocamente, suponha que f não seja contínua em c, isto é, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algum x_δ com a propriedade que $|x_\delta - c| < \delta$, mas $|f(x_\delta) - f(c)| \geq \epsilon_0$. Assim, para cada n, escolhemos $\delta = \frac{1}{n}$ e existe x_n tal que $|x_n - c| < \frac{1}{n}$, mas $|f(x_n) - f(c)| \geq \epsilon_0$. Isto é, $x_n \to c$, mas $f(x_n)$ não converge para $f(c)$, contrariando a hipótese. ■

Exemplo 5.9 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \quad \acute{e}\ racional \\ 1 - x, & se \quad x \quad \acute{e}\ irracional. \end{cases}$$

- f não é contínua em 2. Considere a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ com $x_n = 2 + \frac{1}{n}$. Note que $x_n \to 2$ e $f(x_n) = x_n \to 2 = f(2)$. Mas se considerarmos a sequência $(y_n)_{n\geq 1}$, onde $y_n = 2 + \frac{\sqrt{2}}{n}$, então temos

  $$y_n \to 2,$$

  mas

  $$f(y_n) = 1 - y_n = -1 - \frac{\sqrt{2}}{n} \to -1 \neq 2 = f(2).$$

  Portanto f é descontínua em 2.

- Se f for contínua em c, então $c = \frac{1}{2}$. De fato, entre dois números reais existe número racional e irracional (densidade). Logo podemos ter sequência de racionais convergindo para c e sequência de irracionais convergindo para c. Daí se (x_n) é sequência de racionais com $x_n \to c$, pela continuidade da f, temos

  $$x_n = f(x_n) \to f(c)$$

  e pela unicidade do limite temos $f(c) = c$. Por outro lado, se (y_n) é sequência de irracionais convergindo para c, isto é, $y_n \to c$ então pela continuidade da f, $f(y_n) \to f(c)$, mas

  $$f(y_n) = 1 - y_n \to 1 - c,$$

  daí pela unicidade do limite novamente, temos $f(c) = 1 - c$. Comparando os dois casos temos

  $$f(c) = c = 1 - c \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

- f é contínua em $\frac{1}{2}$. De fato, primeiro note que, tanto para x racional, quanto para x irracional temos

  $$\left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| x - \frac{1}{2} \right|.$$

  Por fim, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$, se $|x - \frac{1}{2}| < \delta$ temos

  $$\left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta = \epsilon.$$

Proposição 5.3 *Seja* $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua. Se* $f(c) > 0$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > 0$*, para todo* $x \in (c - \delta, c + \delta)$.

Demonstração: Para $\epsilon = \dfrac{f(c)}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - c| < \delta$ então

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2} &\Leftrightarrow -\frac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) < \frac{f(c)}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{f(c)}{2} + f(c) < f(x) < \frac{f(c)}{2} + f(c) \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{f(c)}{2} < f(x) < 3\frac{f(c)}{2} \\ &\Rightarrow f(x) > 0. \end{aligned}$$

■

Teorema 5.5 (Teorema de Weierstrass) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f assume máximo e mínimo.*

Lema 5.1 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então a imagem $Im(f) = f([a, b]) = \{f(x) : \ x \in [a, b]\}$ de f é limitada superiormente.*

Demonstração: Suponha f não limitada superiormente, isto é, seu conjunto imagem não é limitado superiormente. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > n$. Dessa forma obtemos uma sequência (x_n) de pontos de $[a, b]$ que é limitada, já que $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Bolzano Weierstrass, existe $(x_{n_j})_{j \geq 1}$ subsequência convergente. Seja c seu limite, daí

$$a \leq x_{n_j} \leq b \Rightarrow a \leq c \leq b,$$

e como f é contínua

$$x_{n_j} \to c \Rightarrow f(x_{n_j}) \to f(c).$$

Agora observe que a sequência de índices da subsequência dada por $n_1 < n_2 < \ldots$ é uma sequência estritamente crescente de números naturais e ainda $f(x_{n_j}) > n_j$ para todo j.

Como $f(x_{n_j}) \to f(c)$, para $\epsilon = 1$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j > j_0$ então $|f(x_{n_j}) - f(c)| < 1$. Então temos

$$n_j < f(x_{n_j}) \leq |f(x_{n_j})| = |f(x_{n_j}) - f(c) + f(c)| \leq |f(x_{n_j}) - f(c)| + |f(c)| < 1 + |f(c)|.$$

Portanto $n_j < 1 + |f(c)|$, para todo $j > j_0$. Um absurdo. ■

Demonstração do Teorema de Weierstrass

Pelo Lema 5.1 e o postulado de Dedekind, existe $M = \sup(Im(f))$ em $\mathbb{R}$.

Existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $M - f(x_1) < 1$, do contrário

$$M - f(x) > 1, \forall\ x \in [a,b] \Rightarrow M - 1 > f(x), \forall\ x \in [a,b],$$

contrariando o fato de M ser supremo. Da mesma forma existe $x_2 \in [a,b]$ tal que $M - f(x_2) < \frac{1}{2}$. Indutivamente construímos uma sequência (x_n) tal que $x_n \in [a,b]$ e $M - f(x_n) < \frac{1}{n}$. Assim (x_n) é limitada e daí pelo Teorema de Bolzano Weierstrass possui subsequência convergente $(x_{n_j})_{j \geq 1}$.

Seja r o limite de $(x_{n_j})_{j \geq 1}$. Como $a \leq x_n \leq b$ então $a \leq r \leq b$. E pela continuidade da f em $[a,b]$, temos $f(x_{n_j}) \to f(r)$. Mas x_{n_j} é, em particular, elemento da sequência (x_n), assim

$$M - f(x_{n_j}) < \frac{1}{n_j} \Rightarrow M < \frac{1}{n_j} + f(x_{n_j}) \Rightarrow M \leq f(r).$$

E por M ser o supremo de $Im(f)$ temos que $M \geq f(r)$. Portanto $M = f(r)$, que será o máximo de f. Analogamente, mostra-se a existência do mínimo.

Teorema 5.6 (Teorema de Bolzano) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Exemplo 5.10 *Vamos mostrar que $f(x) = x^7 + 5x - 8$ tem pelo menos uma raiz real. De fato, note que $f(1) = -2 < 0$ e $f(2) = 130 > 0$. f é uma função polinomial, portanto contínua em todo conjunto dos números reais, em particular no intervalo $[1,2]$, logo pelo Teorema de Bolzano existe $c \in [1,2]$ tal que $f(c) = 0$.*

Definição 5.6 *Seja f uma função de domínio D_f. Se $c \in D_f$ e $f(c) = c$, c é chamado **ponto fixo** de f.*

Exemplo 5.11 *Vamos determinar os pontos fixos da função $f(x) = x^2$. Se c é ponto fixo de f temos*

$$f(c) = c \Rightarrow c^2 = c \Rightarrow c = 0 \quad ou \quad c = 1.$$

Exemplo 5.12 *Se $f : [0,1] \to [0,1]$ é contínua, então existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.*

De fato, se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, o resultado está provado. Se $f(0) \neq 0$ e $f(1) \neq 1$, considere $g(x) = f(x) - x$. É claro que g é contínua em $[0,1]$ e além disso

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0, \quad e$$

$$g(1) = f(1) - 1 < 0.$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1)$ *tal que* $g(c) = 0$*, ou seja,* $f(c) - c = 0$ *e daí* $f(c) = c$*.*

Teorema 5.7 (Teorema do valor intermediário (TVI)) *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua e* d *é um número entre* $f(a)$ *e* $f(b)$ *então existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = d$*.*

Demonstração: Se d está entre $f(a)$ e $f(b)$, existem $r, s \in [a,b]$ tais que $f(s) < d < f(r)$. Defina

$$\begin{array}{rcl} g : [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = f(x) - d. \end{array}$$

- g é contínua em $[a,b]$, pois f o é, logo g é contínua no intervalo de extremos r e s que está contido em $[a,b]$;
- $g(r) = f(r) - d > 0$;
- $g(s) = f(s) - d < 0$.

Pelo Teorema de Bolzano, existe c no intervalo de extremos r e s tal que $g(c) = 0$, isto é $f(c) - d = 0$ e daí $f(c) = d$. ■

Corolário 5.5 *Se* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *é contínua então* $f(I)$ *é um intervalo.*

Demonstração: Se f é constante o resultado é óbvio. Caso contrário, sejam $\alpha = \inf f(I)$ e $\beta = \sup f(I)$. Se não existirem sup e inf, considere $\alpha = -\infty$ e/ou $\beta = \infty$. Provemos que $f(I)$ é um intervalo de extremos α e β. Seja d tal que $\alpha < d < \beta$. Como α e β são ínfimo e supremo, existem $a, b \in I$ tais que

$$\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta.$$

Pelo TVI, existe $c \in [a,b] \subset I$ tal que $f(c) = d$. Assim $d \in f(I)$. ■

Proposição 5.4 *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e crescente em um intervalo* I*. Se* $c \in I^\circ$ *então* $f(c) \in [f(I)]^\circ$*.*

Demonstração: Seja c um ponto do interior de I. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $(c-\epsilon, c+\epsilon) \subset I$. Pelo Corolário 5.5, a imagem de $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ é um intervalo cujas as extremidades são $f(c-\epsilon)$ e $f(c+\epsilon)$. Como f é crescente temos

$$c - \epsilon < c < c + \epsilon \Rightarrow f(c-\epsilon) < f(c) < f(c+\epsilon),$$

ou seja, $f(c)$ está no interior de $[f(c-\epsilon), f(c+\epsilon)] \subset [f(I)]^\circ$. ■

Teorema 5.8 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e crescente em um intervalo I. Então a função inversa $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ é também contínua.*

Corolário 5.6 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e decrescente em um intervalo I. Então a função inversa $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ é também contínua.*

Proposição 5.5 (Continuidade por abertos) *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se para todo aberto $A \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(A)$ é aberto do domínio.*

Demonstração: Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Se $f^{-1}(A) = \emptyset$, então segue o resultado, do contrário, seja $a \in f^{-1}(A)$. Então $a \in D_f$ e $f(a) \in A$, que é aberto. Logo existe $r > 0$ tal que $(f(a) - r, f(a) + r) \subset A$.

Como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$, temos

$$|f(x) - f(a)| < r,$$

isto é,

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a)-r, f(a)+r) \subset A \Rightarrow x \in f^{-1}((f(a)-r, f(a)+r)) \subset f^{-1}(A).$$

Portanto $(a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(A)$ e daí que $f^{-1}(A)$ é aberto.

Reciprocamente, suponha que as imagens inversas de abertos são abertos pela função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e mostremos que f é contínua. Dados $c \in D_f$ e $\epsilon > 0$, o intervalo $(f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon)$ é um conjunto aberto. Por hipótese, $f^{-1}((f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon))$ é um conjunto aberto. E como

$$f(c) \in (f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon) \Rightarrow c \in f^{-1}((f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon)),$$

existe $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subset f^{-1}((f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon))$. Assim, se $x \in \mathbb{R}$ e $|x - c| < \delta$, temos

$$x \in (c-\delta, c+\delta) \subset f^{-1}((f(c)-\epsilon, f(c)+\epsilon)) \Rightarrow f(x) \in (f(c)-\epsilon, f(c)+\epsilon) \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \epsilon.$$

Logo f é contínua. ■

5.3 Continuidade uniforme

Definição 5.7 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **uniformemente contínua** se dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $x, y \in I$ e $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

A diferença entre a definição de função uniformemente contínua e a definição de função contínua é que dado $\epsilon > 0$, para uma função uniformemente contínua o $\delta > 0$, cuja existência é garantida pela definição acima, serve para todos $x, y \in I$, por outro lado, na definição de continuidade tal δ depende do $x_0 \in I$ fixado. É claro que, da definição acima, toda função uniformemente contínua é contínua.

Teorema 5.9 *Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e suponha que f não seja uniformemente contínua. Então existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, encontramos $x, y \in [a, b]$ satisfazendo

$$|x - y| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Daí para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $\delta = \frac{1}{n}$ e então existem $x_n, y_n \in [a, b]$ tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

Como (x_n) é uma sequência em $[a, b]$, ela é limitada. Daí pelo Teorema de Bolzano Weierstrass, existe uma subsequência $(x_{n_j})_{j \geq 1}$ de (x_n) convergindo para algum $x_0 \in [a, b]$. Daí para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$0 \leq |y_{n_j} - x_0| = |y_{n_j} - x_{n_j} + x_{n_j} - x_0| \leq |y_{n_j} - x_{n_j}| + |x_{n_j} - x_0| < \frac{1}{n_j} + |x_{n_j} - x_0|.$$

Quando $j \to \infty$ temos que $|y_{n_j} - x_0| \to 0$, logo $y_{n_j} \to x_0$. Como f é contínua $f(y_{n_j}) \to f(x_0)$ e daí

$$\lim_{j \to \infty} |f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

o que é uma contradição, já que $|f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})| \geq \epsilon$. ■

Exemplo 5.13 *$f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$, mas não é uniformemente contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$.*

De fato, para $\epsilon = \frac{1}{2}$, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \delta$ (pelo Corolário 2.2). Daí se tomarmos $x_1 = \frac{1}{n_0}$ e $x_2 = \frac{1}{n_0 + 1}$ temos

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0 + 1} \right| = \left| \frac{1}{n_0(n_0 + 1)} \right| < \left| \frac{1}{n_0} \right| < \delta.$$

Mas

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |n_0 - (n_0 + 1)| = |1| > \frac{1}{2}.$$

Definição 5.8 *Uma função f é **lipschitziana** no intervalo I se existe $M > 0$ tal que para todos $x_1, x_2 \in I$, tem-se*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < M|x_1 - x_2|.$$

Proposição 5.6 *Toda função lipschitziana num intervalo I é uniformemente contínua em I.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, como f é lipschitziana em I, existe $M > 0$ tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| < M|x_1 - x_2|, \forall\ x_1, x_2 \in I.$$

Considere $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, daí para todos $x_1, x_2 \in I$, se $|x_1 - x_2| < \delta$ temos

$$|f(x_1) - f(x_2| < M|x_1 - x_2| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

■

Observação 5.3 *A recíproca da proposição acima não é válida.*

Exemplo 5.14 *Vamos analisar a função $f(x) = x^2$ com dois domínios distintos.*

- $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ *definida por $f(x) = x^2$ não é lipschitziana. De fato, para todo $M > 0$, existem $x, y \in [2, \infty)$ tais que*

  $$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} \geq M \Rightarrow |x + y| \geq M.$$

  Basta tomar $x = M + 2$ e $y = M + 3$, daí

  $$|x + y| = |2M + 5| > M.$$

- $f : [1, 20] \to \mathbb{R}$ *definida por $f(x) = x^2$ é lipschitziana. De fato, dados $x, y \in [1, 20]$*

  $$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} = |x + y| < 41.$$

5.4 Exercícios

(1) Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, com $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e g limitada numa vizinhança de a. Mostre que $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = 0$.

(2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$.

(a) Determine a maior imagem de f e os pontos do domínio onde ocorre;

(b) Mostre que $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

(3) Mostre que a composta de funções contínuas é contínua.

(4) Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

só é contínua em $x = 0$, mas $|f(x)|$ é contínua para todo x.

(5) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas. Se $f(x) = g(x)$, para todo x irracional, mostre que $f \equiv g$.

(6) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax + 6, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 2x - 3, & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sob que condição f é contínua em um único ponto? Que ponto é esse?

(7) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $A \subset \mathbb{R}$ é fechado, então $f^{-1}(A)$ é fechado.

(8) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $A \subset \mathbb{R}$ é compacto então $f(A)$ é compacto.

(9) *(Teorema do ponto fixo de Brower unidimensional)* Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \leq a$ e $b \leq f(b)$. Mostre que existe pelo menos um número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

(10) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ e n ímpar. Mostre que a imagem de f é o conjunto de todos os números reais.

(11) Prove o Teorema de Bolzano.

(12) Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) + f(x^2) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(13) Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

(14) Classifique os itens a seguir em verdadeiro (**V**) ou falso (**F**). Justifique sua opção com demonstrações e/ou contra-exemplos.

(a) ( ) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(f(x)) = x^2 + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ então f é uma função par.

(b) ( ) O gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $x^3\text{sen}(x)$ intersecta toda reta não vertical em um conjunto infinito de pontos.

(c) ( ) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x)f(x+2) + f(x+1) = 0$, então existe um número finito de valores reais de x tais que $f(x) = 0$.

(d) ( ) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(A)$ é um conjunto aberto para todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$, então f é injetora.

(15) Mostre que $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua.

(16) Seja $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Mostre que:

(a) f é uniformemente contínua;

(b) f não é lipschitziana.

(17) Mostre que a composta de funções uniformemente contínuas é contínua.

(18) Mostre que a composta de funções lipschitzianas é lipschitziana.

(19) Mostre que $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ é contínua, mas não é uniformemente contínua.

(20) (a) Se uma função f é uniformemente contínua em um conjunto S e se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy qualquer de elementos de S, mostre que $(f(x_n))_{n\geq 1}$ também é uma sequência de Cauchy;

(b) Se f é uma função definida em um conjunto limitado S, que transforma sequência de Cauchy de elementos de S em sequência de Cauchy, mostre que f é uniformemente contínua em S.

SUGESTÕES E SOLUÇÕES

A seguir apresentamos algumas sugestões e/ou soluções de exercícios propostos nos capítulos anteriores. É sempre bom lembrar que, a maioria dos exercícios não possui uma única solução, logo incentivamos a todos a buscarem soluções diferentes da que propomos sempre que possível.

Seção 1.3

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

(11)

(12)

(13)

(14)

(15)

(16)

(17)

(18)

(19)

(20)

(21)

(22)

(23)

(24)

(25)

Seção 2.5

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

(11)

(12)

(13)

(14)

(15)

(16)

(17)

(18)

(19)

(20)

(21)

(22)

(23)

(24)

(25)

Seção 3.3

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

(11)

(12)

(13)

(14)

(15)

(16)

(17)

(18)

(19)

(20)

(21)

(22)

(23)

(24)

(25)

(26)

(27)

(28)

(29)

(30)

Seção 4.1

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

(11)

(12)

(13)

(14)

(15)

(16)

Seção 5.4

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

(11)

(12)

(13)

(14)

(15)

(16)

(17)

(18)

(19)

(20)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ÁVILA, G. *Análise Matemática para Licenciatura*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2008.

[2] FIGUEIREDO, D. G. *Análise 1*. 2ª ed., Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro,1996.

[3] FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*. 3ª ed., SBM, Coleção Iniciação Científica, Rio de Janeiro, 2011.

[4] LIMA, E. L. *Análise Real*. 6ª ed., volume 1, IMPA, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, 2002.

[5] MUNIZ NETO, A, C. *Tópicos de Matemática Elementar. Introdução à Análise*. 2ª ed., volume 3, SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.

[6] RIBENBOIM, P. *Funções, Limites e Continuidade*. 1ª ed., SBM, Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2014.

[7] SILVA, J. C., GOMES, O. R. *Estruturas algébricas para licenciatura. Elementos de aritmética superior*. 1ª ed., volume 2, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2018.