UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Introdução à Álgebra*
Prof. *Victor Martins*

Prova 1 - 31/08/2018

(Questões sem justificativas não serão consideradas, portanto apresente as justificativas para cada solução.)

Nome:____Matrícula:__________

Questão 1:

(a) *(0,6 pontos)* Defina *equivalência (lógica)* entre proposições.

(b) *(1,2 pontos)* Mostre utilizando tabela verdade a equivalência

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q).$$

(c) *(1,2 pontos)* Mostre a equivalência do item anterior utilizando o método dedutivo.

Questão 2: *(1,0 ponto)* Mostre, usando indução, que a soma dos n primeiros números naturais pares é $n(n+1)$, isto é,

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n+1), \quad \forall n \geq 1.$$

Questão 3: *(1,0 ponto)* Ocorreu um crime na casa do milionário Josias. Pelas investigações do detetive, sabe-se que foi um ou mais funcionários de Josias que cometeu o crime. Sabe-se também que:

Se o cozinheiro é inocente, então a governanta é culpada.
Ou o mordomo é culpado ou a governanta é culpada, mas não ambos.
O mordomo não é inocente.

Quem cometeu o crime na casa de Josias?

Questão 4: *(5,0 pontos)* Coloque **V** para as afirmações verdadeira e **F** para as falsas. Prove as afirmações que forem verdadeiras e dê contra-exemplos para as falsas.

(a) ( ) Um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \mapsto Q$ é válido se e somente se a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ é uma tautologia;

(b) ( ) $\forall\, x \in \mathbb{R},\, x^2 \geq x$;

(c) ( ) O argumento $P_1, P_2 \mapsto Q$ é válido, onde $P_1 : p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $P_2 :\sim r \wedge q$, $Q :\sim p$;

(d) ( ) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = x$;

(e) ( ) A proposição $P(p,q,r,\ldots)$ implica a proposição $Q(p,q,r,\ldots)$, isto é, $P(p,q,r,\ldots) \Rightarrow Q(p,q,r,\ldots)$ se e somente se $P(p,q,r,\ldots) \to Q(p,q,r,\ldots)$ é uma tautologia.

Questão extra: Uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1 é uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ em que o quociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ é sempre igual a q, para todo $n \geq 2$. Considere uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1. Usando indução prove que:

(a) *(1,0 ponto)* $a_n = a_1 q^{n-1}$;

(b) *(1,0 ponto)* A soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é dada por

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

BOA PROVA!