UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

**Disciplina:** ***Introdução à Álgebra***
**Prof°.** ***Victor Martins***

# Lista 1: Noções de Lógica

(1) Construa as tabelas verdade das proposições compostas a seguir:

(a) $(p \to r) \wedge (q \to r)$

(b) $\sim (p \wedge \sim p)$

(c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \ \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

(d) $(p \to q) \to [p \vee (q \wedge r) \to p \wedge (p \vee r)]$

(2) Seja $p$ a proposição "geometria é fácil" e $q$ a proposição "2 é menor que 3". Enuncie as proposições:

(a) $p \wedge q$

(b) $p \vee q$

(c) $(\sim (p \vee q)$

(d) $\sim (p \wedge q)$

(e) $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \ \wedge q)$

(3) Consideremos as proposições:

$$p : \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1, \quad \text{para todo } x \text{ real;}$$

$$q : \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = x, \quad \text{para todo } x \text{ real;}$$

Determine:

(a) $v(p)$;

(b) $v(q)$;

(c) $v(\sim p \leftrightarrow p \vee q \to q \wedge (\sim q \to p))$.

(4) Negue as seguintes frases:

(a) A loja está fechada.

(b) Fui mal na prova.

(c) Vou reprovar.

(d) O Brasil ganhará medalhas de ouro.

(e) O Brasil não ganhará medalhas de bronze.

(5) Mostre que se $v(p \to q) = V$ e $v(\sim q) = V$, então $v(\sim p) = V$.

(6) (OBM) Quatro amigos vão visitar um museu e um deles resolve entrar sem pagar. Aparece um fiscal que quer saber qual deles entrou sem pagar.

- Não fui eu, diz Benjamin.

- Foi o Pedro, diz o Carlos.

- Foi o Carlos, diz o Mário.

- O Mário não tem razão, diz o Pedro.

Só um deles mentiu e só um deles entrou sem pagar. Quem mentiu e quem não pagou a entrada do museu?

(7) Demonstre as regras abaixo:

(a) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ (Regra do silogismo disjuntivo)

(b) $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$ (Regra Modus ponens)

(c) $(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ (Regra Modus tollens)

(d) $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$ (Regra do silogismo hipotético)

(8) Mostre que:

(a) $p \to q \not\Leftrightarrow q \to p$ ($\not\Leftrightarrow$ lê-se: não é equivalente a)

(b) $p \to q \not\Leftrightarrow \sim p \to \sim q$

(9) (a) Mostre que

$$p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p \qquad \text{e} \qquad p \to q \Leftrightarrow q \vee \sim p.$$

(b) Associe cada proposição da primeira tabela com todas as proposições equivalentes a ela na segunda tabela:

| |
|---|
| Se há perdão, então a paz é possível; |
| Se não há perdão, então a paz é possível; |
| Se não há perdão, então a paz não é possível; |
| Se há perdão, então a paz não é possível. |

| |
|---|
| Se a paz não é possível então há perdão; |
| A paz é possível ou não há perdão; |
| Se a paz é possível, então não há perdão; |
| A paz não é possível ou há perdão; |
| Se a paz não é possível, então não há perdão; |
| A paz é possível ou há perdão; |
| Se a paz é possível, então há perdão; |
| A paz não é possível ou não há perdão. |

(10) Mostre através da tabela verdade e do método dedutivo, a equivalência:

$$(p \to q) \wedge (p \to \sim p) \Leftrightarrow p \to q \wedge \sim q.$$

**Solução pelo método dedutivo:** Considere abaixo $f$ sendo a proposição falsidade:

$$\begin{aligned}
(p \to q) \wedge (p \to \sim p) &\underbrace{\Leftrightarrow}_{(i)} (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim p) \\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{(ii)} (\sim p \vee q) \wedge (\sim p) \\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{(iii)} \sim p \wedge (\sim p \vee q) \\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{(iv)} \sim p \\
&\Leftrightarrow \sim p \vee f \\
&\Leftrightarrow p \to f \\
&\Leftrightarrow p \to q \wedge \sim q,
\end{aligned}$$

onde foram usadas as seguintes equivalências em cada passo:

(i) $(p \to q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$ e $(p \to \sim p) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim p$

(ii) $\sim p \vee \sim p \Leftrightarrow \sim p$

(iii) Comutatividade da conjunção

(iv) $\sim p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim p$ (absorção)

(11) Consideremos as proposições

$p : \pi$ é irracional;

$q : \pi$ não é dízima periódica;

$r : 9$ é quadrado perfeito;

Traduza para a linguagem corrente:

(a) $\sim p \veebar q$;

(b) $q \wedge p \to r$;

(c) $\sim (p \vee q)$.

(12) Prove que, se $a^3$ é ímpar, então $a$ é ímpar.

(13) Consideremos as premissas abaixo

$$(p \to q) \vee \sim r, \quad \sim r \to s, \quad \sim s \vee q, \quad \sim q$$

Podemos concluir, a partir das premissas, a(s) seguinte(s) proposição(ões):

(a) $\sim s \to q$

(b) $r \to p$

(c) $\sim p \to s$

(d) $p \to r$

(e) $\sim q \to \sim r$

(f) $\sim q \to s$

(14) Quantifique a fim de obter proposições verdadeiras:

(a) $x + y = 8$

(b) $\sec^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2\, x$, onde o conjunto universo da variável $x$ é o intervalo $[0, \pi]$.

(c) $\mathrm{sen}\, x = 2$.

(15) Sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das proposições a seguir e depois faça a negação de cada uma delas:

(a) $(\forall\, x \in \mathbb{R})(|x| = x)$

(b) $(\exists\, x \in \mathbb{R})(|x| = 0)$

(c) $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x + 1 > x)$

(d) $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$

(e) $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$

(f) $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x + 2 = x)$