



Prova 1 - 05/06/2025

Nome: _____ Matrícula: _____

Questão 1: Considere o sistema de equações lineares representando três planos no espaço:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

- (a) (1,5 pontos) O sistema tem solução única, infinitas ou nenhuma?
- (b) (0,5 pontos) Interprete geometricamente a solução (interseção de planos).

Questão 2: Considere o sistema linear $AX = B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- (a) (1,0 ponto) Verifique se o sistema tem solução única para qualquer vetor B .
- (b) (1,0 ponto) Caso tenha, encontre a solução para $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Questão 3: Considere o \mathbb{R}^2 com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas a seguir:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2)$$

$$a(x, y) = (ax, ay).$$

- (a) (1,0 ponto) Caso exista, determine o elemento neutro da adição definida acima.
- (b) (1,0 ponto) \mathbb{R}^2 com as operações definidas acima é um \mathbb{R} -espaço vetorial? Justifique.

Questão 4: (4,0 pontos) Para cada uma das afirmações abaixo, diga se é Verdadeira (**V**) ou Falsa (**F**). Se for verdadeira, faça uma demonstração ou justificativa rigorosa. Se for falsa, apresente um contraexemplo que mostre claramente sua falsidade.

- (a) () Se uma matriz quadrada A é simétrica, então sua inversa A^{-1} (quando existir) também é simétrica.
- (b) () Se duas matrizes A e B são quadradas de mesma ordem e satisfazem $AB = BA$, então $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- (c) () Toda matriz quadrada que é igual à sua transposta (ou seja, simétrica) tem determinante não negativo.
- (d) () Para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$ a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 3 & x \\ 2 & x & 2 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$ é inversível.

BOA PROVA!